

# El avión de bombardeo en picado desde el punto de vista aerodinámico

Por Felipe Lafita Babio

CORONEL DE INGENIEROS AERONÁUTICOS E INGENIERO NAVAL

I. En el número de esta Revista correspondiente al mes de febrero, en la descripción del *Ju-88*, y en la página 186, al transcribir una información de la revista *Flight*, se dice: "Otra novedad no conocida en ningún aparato inglés", etc.

Es decir, que para el redactor de *Flight* la razón de la existencia del freno de timones es debida a que dicho avión no fué proyectado para bombardeo en picado, sino para bombardeo en horizontal, y que, por tanto, al transformarse en aquel tipo, como no se habían tenido en cuenta las grandes velocidades que tiene que alcanzar en el bombardeo en picado, no se han proyectado los mandos con los dispositivos necesarios para evitar su oscilación. Yo entiendo que hacer semejante suposición es un error absoluto del mencionado redactor, ya que en un avión como el *Ju-88*, que desarrolla una velocidad máxima de 517 kms.-h. y que en picado su freno aerodinámico no le permite pasar de una velocidad en los alrededores de 600 kms.-h.; es decir, un 15 por 100 superior a la máxima horizontal, ¿cómo es posible suponer que no se han estudiado los mandos teniendo en cuenta este pequeño margen de velocidad?

Además, siendo el problema de la oscilación de los mandos tan conocido y estudiado que en la actualidad se encuentra totalmente normalizado, no es posible pensar que se le haya podido pasar por alto al proyectista. Por otra parte, el *Ju-87* es un avión proyectado para tener como misión principal el bombardeo en picado, y, efectivamente, tiene en sus mandos de altura el mismo freno indicado.

Por tanto, no es la razón indicada en el *Flight* la que motivó el dispositivo a que hace referencia, sino la necesidad de evitar toda acción de orden personal, imposible de evaluar en los cálculos.

Del examen de esas fases se comprende que la fase de enfilado del blanco y continuación con esa trayectoria hasta el lanzamiento será corta en tiempo, pero larga en espacio, y, por tanto, es muy probable que el avión esté sujeto a perturbaciones atmosféricas, en especial diferencias en las velocidades horizontales del viento.

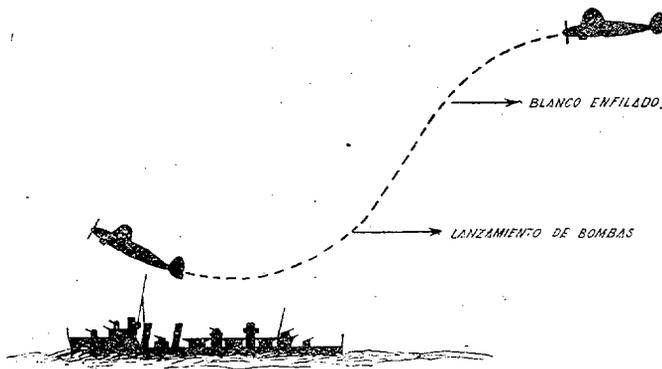


Fig. 1

Si examinamos las fases por las que pasa un avión de bombardeo en picado desde que comienza el ataque hasta el momento en que lanza sus bombas, vemos que en el momento inicial el avión estará volando horizontalmente; inmediatamente curvará su trayectoria para dirigirse al blanco, y, una vez enfilado éste, seguirá con esa dirección hasta la altura a la que ha de hacer el lanzamiento de sus bombas, para nuevamente curvar su trayectoria y ganar altura (fig. 1).

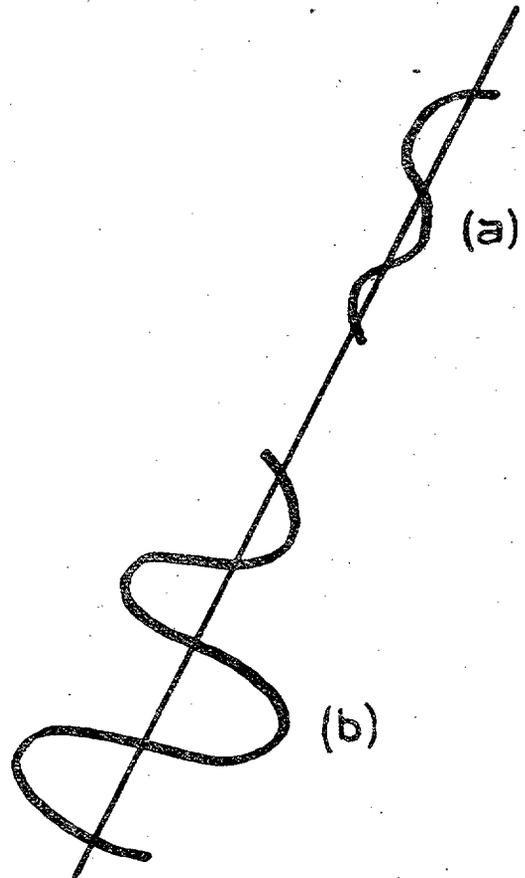


Fig. 2

Estas perturbaciones separarán al avión de su posición de equilibrio y lo desenfilarán del blanco. Ahora bien: el avión, siendo estáticamente estable, puede volver a su posición primitiva por oscilaciones cada vez de menor amplitud o por oscilaciones más y más grandes (fig. 2, a y b), según que el avión sea dinámicamente estable o inestable.

Evidentemente, para un avión del tipo considerado será preciso que el avión sea dinámicamente estable y, además, que esta estabilidad sea muy grande, ya que de este modo reduciremos el tiempo en que el piloto pierde el blanco.

No cabe duda que las perturbaciones atmosféricas indicadas anteriormente pueden originar velocidades angulares de

cabezada, balance, guiñada y de resbalamiento, las que darán lugar a momentos de cabezada, balance y guiñada. Ahora bien: los mandos del avión dan lugar a esos mismos momentos, y, por tanto, el movimiento del avión, en el caso más general, será función de las siete variables  $q, p, r, V_R, \epsilon, \zeta, \xi$ ; donde  $q$  = velocidad angular de cabezada,  $p$  = velocidad angular de balance,  $r$  = velocidad angular de guiñada,  $V_R$  = velocidad de resbalamiento,  $\epsilon$  = ángulo de giro del timón de altura,  $\zeta$  = ángulo de giro de los alerones,  $\xi$  = ángulo de giro del timón de dirección.

El estudio del movimiento del avión no puede hacerse correctamente nada más que en supuesto de perturbaciones o ángulos infinitamente pequeños, y lógicamente cabe pensar que en la mayor parte de los casos así sucederá con las perturbaciones atmosféricas; en cambio, la introducción de los mandos estará influenciada por una apreciación de índole personal, la sensibilidad del piloto, la cual no puede tenerse en cuenta en los cálculos. Por todo ello parece lógico pensar que el proyectista del avión haya querido eliminar esas variables, que él no puede introducir con certeza en los cálculos y que probablemente estarían variando continuamente. De este modo él puede calcular perfectamente (por lo menos, en el aspecto cualitativo) el movimiento del avión como si fuera un sólido rígido y obtener las condiciones necesarias para que el avión sea muy estable dinámicamente.

A continuación vamos a examinar la influencia de los diversos elementos del avión en su movimiento, con el fin de fijar aquéllos de modo que respondan a las necesidades exigidas al tipo de avión examinado.

Para lograr este fin no hay otro camino que el del estudio de la estabilidad dinámica del avión, que, naturalmente, no voy a exponer en toda su amplitud, ya que puede encontrarse en cualquier texto moderno de Aerodinámica—Ref. (1)—; pero sí expondremos, en rasgos generales, cómo podemos llegar a determinar las influencias que queremos examinar.

Como ya hemos indicado anteriormente, para determinar el tipo de movimiento que engendra un avión cuando se le separa de su posición de equilibrio hay que suponer las perturbaciones infinitamente pequeñas, y aun así y todo, el estudio matemático resulta bastante complicado. Conviene también advertir que para el estudio matemático del problema hay que suponer que la perturbación únicamente se produce en una de las variables, permaneciendo las demás constantes. Una vez conocido el movimiento engendrado por la perturbación de cada una de las variables, para determinar el engendrado por la perturbación de varias de ellas basta sumar los resultados obtenidos por la perturbación de cada una de ellas.

II. ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO

La obtención de estas ecuaciones está basada en el supuesto de considerar el avión como un "sólido perfecto"; es decir, absolutamente indeformable. En este supuesto, el movimiento del avión se obtiene del movimiento de traslación del C. G. y del de rotación alrededor de éste.

Para este estudio consideraremos un sistema de ejes fijos al avión, definido como sigue (fig. 3):

Los ejes OX y OZ están situados en el plano de simetría del avión, siendo sus direcciones las siguientes:

La de OX, paralela al viento relativo o a la cuerda del ala, según convenga, para mayor facilidad. En el primer caso se denominará "ejes viento", y en el segundo, "ejes cuerda".

La de OZ, vertical.

El eje OY es perpendicular al plano de simetría.

El origen de este sistema de ejes es el C. G.

Las direcciones positivas de estos ejes son las dibujadas en la figura 3.

Las rotaciones alrededor de estos ejes se consideran como positivas cuando tengan la misma dirección que el giro de un tornillo a derechas, avanzando en el sentido positivo de los ejes.

Para fijar la posición del avión respecto al C. G. emplearemos las coordenadas angulares  $\Theta, \Phi, \Psi$ , que fijan las posiciones de los ejes anteriores respecto a unos ejes fijos en tierra, de tal modo que cuando  $\Theta = \Phi = \Psi = 0$ , el eje OZ es vertical y los ejes OX y OY están situados en un plano horizontal, teniendo el eje OX una dirección determinada. De

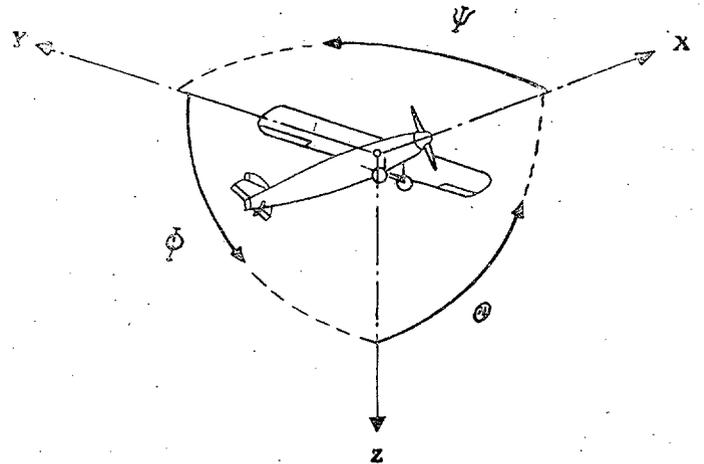


Fig. 3

este modo una posición cualquiera del avión respecto a esos ejes puede determinarse mediante tres rotaciones, a saber:

- 1.º Una rotación  $\Psi$  alrededor del eje OZ, hasta que el eje OX se sitúe en el plano vertical que contiene su posición final.
- 2.º Una rotación  $\Phi$  alrededor del eje OY, hasta que el eje OX tome su posición final.
- 3.º Una rotación  $\Theta$  alrededor del eje OX hasta que el eje OZ coincida con la posición final.

Las componentes de la velocidad aerodinámica del C. G., según los ejes, las designamos por U, V, W.

Las componentes de la reacción aerodinámica las designamos por X, Y, Z.

Los momentos componentes de la reacción aerodinámica los designamos por  $M_x, M_y, M_z$ .

Las componentes de la rotación respecto al C. G. las designamos por P, Q, R.

Los momentos de inercia del avión respecto a los mismos ejes los designamos por  $I_x, I_y$  e  $I_z$ .

Los productos de inercia los designamos por  $P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$ .

Las componentes del momento de la cantidad de movimiento las designamos por  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ .

La masa del avión la designamos por m.

Una vez fijados estos símbolos, podemos establecer las seis ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} m [ U' + QW - RV ] &= X - mg \text{ sen } \Theta \\ m [ V' + RU - WP ] &= Y + mg \text{ cos } \Theta \text{ sen } \Phi \\ m [ W' + PV - UQ ] &= Z + mg \text{ cos } \Theta \text{ cos } \Phi \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \sigma_x}{d t} + Q \sigma_z - R \sigma_y &= M_x \\ \frac{d \sigma_y}{d t} + R \sigma_x - P \sigma_z &= M_y \\ \frac{d \sigma_z}{d t} - P \sigma_x - Q \sigma_y &= M_z \end{aligned} \right\} (2)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= I_x P - P_{xy} Q - P_{yz} R \\ \sigma_y &= I_y Q - P_{yz} R - P_{xz} P \\ \sigma_z &= I_z R - P_{xz} P - P_{xy} Q \end{aligned} \right\} (3)$$

Conviene observar que únicamente se han considerado como fuerzas exteriores el peso y la reacción aerodinámica, despreciándose la tracción de la hélice. El suponer el motor en marcha complica mucho el problema; pero examinaremos al final a qué modificaciones conduce, sobre las soluciones obtenidas, en el caso, más sencillo, de suponer el motor parado.

A simple vista se comprende la dificultad que encierra la

resolución de las ecuaciones anteriores, no solamente en lo que a su integración se refiere, sino a su planteamiento, ya que las variables X, Y, Z, M<sub>x</sub>, M<sub>y</sub>, M<sub>z</sub> son funciones de U, V, W, P, Q, R y de U', V', W', P', Q', R', y en la actualidad no se conocen estas funciones. Por estas razones es necesario hacer una serie de simplificaciones, las cuales conducen a resultados suficientemente exactos.

La primera simplificación consiste en considerar únicamente

la influencia de W' en M<sub>y</sub>, despreciando todas las demás influencias de U', V', etc. Es decir, supondremos que la reacción aerodinámica depende únicamente del valor actual de la velocidad, pero no de la historia del movimiento.

La segunda simplificación consiste en suponer el movimiento uniforme, con lo cual desaparecen de las ecuaciones todas las derivadas.

Con arreglo a las suposiciones indicadas, y observando que

$$\begin{aligned}
 X &= F_1(U, V, W, P, Q, R) = X_o + \frac{\partial X}{\partial U} dU + \frac{\partial X}{\partial V} dV + \frac{\partial X}{\partial W} dW + \frac{\partial X}{\partial Q} dQ + \dots \\
 Y &= F_2(U, V, W, P, Q, R) = Y_o + \frac{\partial Y}{\partial U} dU + \frac{\partial Y}{\partial V} dV + \frac{\partial Y}{\partial W} dW + \frac{\partial Y}{\partial Q} dQ + \dots \\
 Z &= F_3(U, V, W, P, Q, R) = Z_o + \frac{\partial Z}{\partial U} dU + \frac{\partial Z}{\partial V} dV + \frac{\partial Z}{\partial W} dW + \frac{\partial Z}{\partial Q} dQ + \dots \\
 M_x &= F_4(U, V, W, P, Q, R) = M_{xo} + \frac{\partial M_{xo}}{\partial U} dU + \frac{\partial M_{xo}}{\partial V} dV + \frac{\partial M_{xo}}{\partial W} dW + \frac{\partial M_{xo}}{\partial Q} dQ + \dots \\
 M_y &= F_5(U, V, W, P, Q, R, W') = M_{yo} + \frac{\partial M_{yo}}{\partial U} dU + \frac{\partial M_{yo}}{\partial V} dV + \frac{\partial M_{yo}}{\partial W} dW + \frac{\partial M_{yo}}{\partial Q} dQ + \dots + \frac{\partial M_{yo}}{\partial W'} dW' \\
 M_z &= F_6(U, V, W, P, Q, R) = M_{zo} + \frac{\partial M_{zo}}{\partial U} dU + \frac{\partial M_{zo}}{\partial V} dV + \frac{\partial M_{zo}}{\partial W} dW + \frac{\partial M_{zo}}{\partial Q} dQ + \dots
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde X<sub>o</sub>, Y<sub>o</sub>, etc representan los valores iniciales de X, Y, Z, M<sub>x</sub>, M<sub>y</sub>, M<sub>z</sub>, a partir de los cuales se produce la perturbación infinitesimal.

Para abreviar las expresiones anteriores se puede emplear la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X}{\partial U} &= X_u \quad \frac{\partial Y}{\partial U} = Y_u \quad \frac{\partial Z}{\partial U} = Z_u \quad \frac{\partial X}{\partial V} = X_v \quad \frac{\partial X}{\partial W} = X_w \dots \\
 dU &= U - U_o = u \quad dV = v \quad dW = w \quad dP = p \quad dQ = q \quad dR = r.
 \end{aligned}$$

Las reacciones y las perturbaciones pueden dividirse en dos grupos, a saber:

- 1.º Grupo simétrico.
  - a) Reacciones X, Z, M<sub>y</sub>.
  - b) Perturbaciones dU, dW, dQ.
- 2.º Grupo asimétrico.
  - a) Reacciones Y, M<sub>x</sub>, M<sub>z</sub>.

b) Perturbaciones dV, dP, dR.

Pues bien; podemos simplificar las expresiones anteriores teniendo en cuenta:

1.º Que ninguna perturbación simétrica puede producir reacción alguna asimétrica; es decir: Y, M<sub>x</sub>, M<sub>z</sub> son independientes de dU, dW, dQ.

Luego:

$$\frac{\partial Y}{\partial U} = \frac{\partial Y}{\partial W} = \frac{\partial Y}{\partial Q} = \frac{\partial M_x}{\partial U} = \frac{\partial M_x}{\partial W} = \frac{\partial M_x}{\partial Q} = \frac{\partial M_z}{\partial U} = \frac{\partial M_z}{\partial W} = \frac{\partial M_z}{\partial Q} = 0.$$

2.º Por consideraciones de simetría, X es independiente del signo de V, y, por tanto, X es una función simétrica respecto a V; luego para V = 0,  $\frac{dX}{dV} = 0$ .

En estas condiciones, las 37 derivadas de las expresiones (4) quedan reducidas a 19.

Con arreglo a estas simplificaciones, y observando que U' = u', V' = v', etc., que  $\Theta = \Theta_o + \theta$ ,  $\Psi = \Psi_o + \psi$ ,  $\Phi = \Phi_o + \phi$ , que en vuelo simétrico uniforme V<sub>o</sub> = P<sub>o</sub> = Q<sub>o</sub>, R<sub>o</sub> = Φ<sub>o</sub> = 0, que podemos despreciar los productos de segundo orden, tales como v, r, y que por ser el plano XZ de simetría P<sub>xy</sub> = P<sub>yz</sub> = 0, las ecuaciones (1) y (2) tomarán la forma:

Lo mismo sucederá con las demás reacciones simétricas respecto a las perturbaciones asimétricas.

3.º En el vuelo simétrico uniforme V = P = Q = 0.

$$\begin{aligned}
 m [u' + W_o q] &= X_o + X_u u + X_w w + X_q q - mg \operatorname{sen} \Theta_o - mg \cos \Theta_o \theta \\
 m [v' + U_o r - W_o q] &= Y_o + Y_v v + Y_p p + Y_R r + mg \cos \Theta_o \phi \\
 m [w' - U_o q] &= Z_o + Z_u u + Z_w w + Z_q q + mg \cos \Theta_o - mg \operatorname{sen} \Theta_o \theta \\
 I_x p' - P_{xz} r' &= M_{xo} + M_{xv} v + M_{xp} p + M_{xr} r + M_{x1} \\
 I_y q' &= M_{yo} + M_{yu} u + M_{yw} w + M_{yq} q + M_{y2} w' + M_{y1} \\
 I_z r' - P_{xz} p' &= M_{zo} + M_{zv} v + M_{zp} p + M_{zr} r + M_{z1}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Donde M<sub>x1</sub>, M<sub>y1</sub>, M<sub>z1</sub> representan los momentos infinitamente pequeños aplicados por los mandos para producir la perturbación.

Cuando ello no sea necesario, como en nuestro caso, dichos momentos se anularán.

Estas ecuaciones pueden dividirse en dos grupos:  
 1.º Grupo simétrico.—Primera, tercera y quinta, en las cuales no entran más que variables simétricas.  
 2.º Grupo asimétrico.—Segunda, cuarta y sexta, en las cuales no entran más que variables asimétricas.

Probablemente lo más interesante desde el punto de vista examinado será la estabilidad dinámica longitudinal, que corresponde a las ecuaciones del primer grupo. Por estas razones, nos vamos a referir únicamente a dicho primer grupo.

$$\left. \begin{aligned} m u' - X_u u - X_w w + (m W_0 - X_q) q + m g \cos \Theta_0 \int q dt &= 0 \\ - Z_u u + m w' - Z_w w - (m U_0 + Z_q) q + m g \sin \Theta_0 \int q dt &= 0 \\ - M_{yu} u - M_{yw} w - M_{yq} q + I_y q' - M_{yq} q &= M_{y1} \end{aligned} \right\} (6)$$

Glauert expresa estas ecuaciones bajo forma adimensional, lo cual representa una extraordinaria ventaja para el problema que nos ocupa.

Unidad de longitud:  $l$ .

$$\text{Unidad de tiempo: } \tau = \frac{m}{g \cdot V S} = \mu \frac{l}{V}$$

III. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO BAJO FORMA ADIMENSIONAL. REF. (2)

Evidentemente, las ecuaciones (6) son independientes del sistema de unidades elegidas, siempre que ellas sean tales que la que represente la fuerza sea igual al producto de las que representan la masa y la aceleración.

Glauert adopta las siguientes unidades:

Unidad de masa:  $m$ .

Donde  $m$  = masa del avión,  $l$  = una longitud representativa del avión, que, en general, es la distancia del C. G. del avión al eje de giro del timón de altura. (En algunos casos especiales se toma  $l$  como la envergadura del avión.) Con arreglo a estas unidades, si dividimos las diversas cantidades de las ecuaciones (6) por las unidades correspondientes, obtendremos una serie de coeficientes, que designaremos por las letras de la tabla adjunta.

SÍMBOLO	COEFICIENTE	SÍMBOLO	COEFICIENTE	SÍMBOLO	COEFICIENTE
$t_c$	$\frac{1}{\tau} t$	$x_q$	$-X_q / \rho S V$	$z_q$	$-Z_q / \rho V S$
$u'_c$	$\frac{\rho V^2 S}{m \mu} u'$	$q_c$	$-\mu l q / V$	$k_y$	$-I_y / m l^2$
$u_c$	$u / V$	$z_u$	$-Z_u / \rho V S$	$m_{yu}$	$-M_{yu} / \rho V S l k_y$
$x_u$	$-X_u / \rho V S$	$w'_c$	$-\rho V^2 S / m \mu w'$	$m_{yw}$	$-M_{yw} / \rho V S l k_y$
$x_w$	$-X_w / \rho V S$	$z_w$	$-Z_w / \rho V S$	$m_{yq}$	$-M_{yq} / \rho V S l k_y$
$w_c$	$\frac{\mu}{V} w$	$w_c$	$-\mu / V w$	$m_{yq'}$	$-M_{yq'} / \rho V S l k_y$

Los momentos de inercia del avión pueden determinarse, aproximadamente, mediante la Ref. (3).

Observando que si tomamos por ejes los "eje viento"  $W_0 = 0$ , que para cada velocidad para aviones semejantes, volando semejantemente

lando semejantemente  $\frac{m g}{\rho V^2 S}$ , es constante, y suponemos el avión abandonado a sí mismo,  $M_{y1} = 0$ , las ecuaciones de movimiento tomarán la forma:

$$\left. \begin{aligned} u'_c + x_u u_c + x_w w_c + x_q q_c + k \mu \cos \Theta_0 \int q_c dt &= 0 \\ + z_u u_c + w'_c + z_w w_c - \mu q_c + z_q q_c + k \mu \sin \Theta_0 \int q_c dt &= 0 \\ + m_{yu} u_c + \frac{m_{yw}}{\mu} w'_c + m_{yw} w_c + q'_c + m_{yq} q_c &= 0 \end{aligned} \right\} (7)$$

Conocidas las distintas derivadas, podemos resolver este sistema y determinar  $u'_c$ ,  $w'_c$  y  $q_c$ . Más tarde indicaremos los valores que pueden tomarse para las citadas derivadas.

Para la resolución del sistema anterior es preciso determinar la "función complementaria".

En este sistema sin segundo miembro las variables están ligadas a los coeficientes diferenciales por las relaciones:

$$u'_c = \lambda u_c \quad w'_c = \lambda w_c \quad q'_c = \lambda q_c \quad \int q_c dt = \lambda^{-1} q_c$$

donde  $\lambda$  es una constante real o compleja, que tiene el mismo valor para todas las variables.

Por tanto, las soluciones del sistema serán:

$$\left. \begin{aligned} u_c &= u_{1c} e^{\lambda t} \quad w_c = w_{1c} e^{\lambda t} \quad q_c = q_{1c} e^{\lambda t} \\ \theta_c &= \int q_c dt = \lambda^{-1} q_{1c} e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} (8)$$

donde  $u_{1c}$ ,  $w_{1c}$ ,  $q_{1c}$  son constantes reales o complejas. Para la determinación de estas constantes y  $\lambda$  bastará observar que por ser los valores (8) las soluciones del sistema han de verificar a las ecuaciones generales del movimiento; luego se verificará:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + x_u) u_{1c} + x_w w_{1c} + \mu k \cos \Theta_0 \lambda^{-1} q_{1c} + x_q q_{1c} &= 0 \\ z_u u_{1c} + (\lambda + z_w) w_{1c} + (-\mu + \mu k \sin \Theta_0 \lambda^{-1}) q_{1c} + z_q q_{1c} &= 0 \\ m_{yu} u_{1c} + \left( \frac{m_{yw}}{\mu} \lambda + m_{yw} \right) w_{1c} + (\lambda + m_{yq}) q_{1c} &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

donde las incógnitas son  $w_{1c}$ ,  $w_{2c}$ ,  $q_{1c}$  y  $\lambda$ . Pero si dividimos los dos miembros del sistema (9) por  $q_{1c}$  tendremos como incógnitas a  $w_{1c}/q_{1c}$ ,  $w_{2c}/q_{1c}$  y  $\lambda$ .

Ahora bien; para la eliminación de estas relaciones en las ecuaciones (9) basta establecer la condición (ya que, como veremos más tarde,  $x_q = z_q = 0$ ) —

$$\begin{vmatrix} \lambda + x_u & x_w & \mu k \cos \Theta_1 \lambda^{-1} \\ z_u & \lambda + z_w & -\mu + \mu k \sin \Theta_1 \lambda^{-1} \\ m_{yu} & \frac{m_{yw'}}{\mu} \lambda + m_{yw} & \lambda + m_{yq} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante, tendremos la ecuación de 4.º en  $\lambda$ :

$$\lambda^4 + (x_u + z_w + m_{yq} + m_{yw'}) \lambda^3 + [x_u z_w - x_w z_u + m_{yq} (x_u + z_w) + \mu m_{yw} + m_{yw'} x_u - k m_{yw'} \sin \Theta_1] \lambda^2 + [m_{yq} (x_u z_w - x_w z_u) - \mu m_{yu} (x_w + k \cos \Theta_1) + \mu m_{yw} (x_u - k \sin \Theta_1) + k m_{yw'} (z_u \cos \Theta_1 - x_u \sin \Theta_1)] \lambda + \mu k m_{yu} (x_w \sin \Theta_1 - z_w \cos \Theta_1) + \mu k m_{yw} (z_u \cos \Theta_1 + x_u \sin \Theta_1) = 0,$$

Esta ecuación, teniendo en cuenta que  $\frac{m_{yw'}}{\rho S V^2} = K$  y que  $L = \frac{1}{2} C_L \rho S V^2 = mg \cos \Theta_1 = K \rho S V^2 \cos \Theta_1$ ; luego,

$\frac{1}{2} C_L = K \cos \Theta_1$ , puede ponerse en la forma:

$$\lambda^4 + (x_u + z_w + m_{yq} + m_{yw'}) \lambda^3 + [x_u z_w - x_w z_u + m_{yq} (x_u + z_w) + \mu m_{yw} + m_{yw'} x_u - \frac{1}{2} C_L \tan \Theta_1 m_{yw'}] \lambda^2 + [m_{yq} (x_u z_w - x_w z_u) - \mu m_{yu} (x_w + \frac{1}{2} C_L) + \mu m_{yw} (x_u - \frac{1}{2} C_L \tan \Theta_1) + m_{yw'} \frac{1}{2} C_L (z_u - x_u \tan \Theta_1)] \lambda + \mu m_{yu} [x_w \tan \Theta_1 - z_w \frac{1}{2} C_L] + \mu m_{yw'} \frac{1}{2} C_L [z_u + x_u \tan \Theta_1] = 0. \tag{10}$$

Para mayor sencillez, llamaremos B, C, D y E a los coeficientes de  $\lambda^3$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda$ , y término independiente, respectivamente, con lo que la ecuación tomará la forma:

$$\lambda^4 + B \lambda^3 + C \lambda^2 + D \lambda + E = 0 \tag{11}$$

Como para el problema examinado únicamente nos interesa el aspecto cualitativo, éste lo podemos deducir del examen de los coeficientes B, C, D y E.

Así, si todos los coeficientes son positivos, la solución no podrá contener raíces reales positivas, y, por tanto, el movimiento no tiene ningún modo que incremente como una función exponencial del tiempo. Si, además, el discriminante de Routh, definido por  $B, C, D - D^2 - EB$  Ref (4) — es mayor que cero, las partes reales de las raíces complejas no pueden ser positivas, y no se podrá producir ninguna oscilación que aumente con el tiempo; es decir, el movimiento será estable.

Si  $E = 0$ , una de las raíces será cero, y, por tanto, uno de los modos del movimiento continúa constantemente, y el equilibrio es indiferente.

Si el discriminante de Routh es cero, las raíces son complejas y la parte real es cero, y, por tanto, el movimiento es una oscilación de amplitud constante.

Si el discriminante de Routh o alguno de los coeficientes son negativos, el avión será inestable.

En general, D y E son muy chicos respecto a B y C, por lo que el discriminante de Routh puede ponerse en la forma  $B(CD - EB)$ , y la condición de estabilidad exigirá que

$$B > 0 \quad C > 0 \quad D > 0 \quad E > 0 \quad CD - EB > 0,$$

Con la misma hipótesis respecto a los valores de los coeficientes, las cuatro raíces pueden obtenerse como sigue:

a) Raíces grandes.

$$\lambda^2 + B \lambda + C = 0.$$

Estas, al ser  $B > 0$  y  $C > 0$ , representan un movimiento rápidamente amortiguado, y, por tanto, sin gran importancia en nuestro caso.

b) Raíces pequeñas.

$$\lambda^2 + \left( \frac{CD - BE}{C^2} \right) \lambda + \frac{E}{C} = 0.$$

Estas raíces tendrán por valor:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[ \frac{DC - BE}{C^2} \pm i \sqrt{\frac{E}{C} - \frac{1}{4} \left[ \frac{DC - BE}{C^2} \right]^2} \right]$$

Estas corresponderán a un movimiento lentamente amortiguado, de un período aproximado a:

$$2 \pi \tau \sqrt{\frac{C}{E}} = \frac{2 \pi m}{\rho S V} \sqrt{C/E}$$

y cuyo factor de amortiguamiento es  $\frac{1}{2} \frac{DC - BE}{C^2}$ .

Por tanto, estas raíces son las que más nos interesarán desde el punto de vista del bombardeo en picado, y hemos de

procurar que el factor de amortiguamiento sea lo mayor posible.

Para determinar cómo influyen los distintos elementos del avión en los coeficientes y en ese factor de amortiguamiento, es preciso conocer los valores de las derivadas.

#### IV. VALORES DE LAS DERIVADAS

No considero aquí cómo pueden determinarse las distintas derivadas, y quien desee mayor información sobre este asunto puede encontrarlo en la Ref. (5).

Únicamente diré que, con suficiente aproximación, puede tomarse para las distintas derivadas los valores siguientes:

$$x_u = C_D \quad z_u = C_L \quad x_w = -\frac{1}{2} C_L (1 - c')$$

$$z_w = \frac{1}{2} \frac{d C_L}{d a} = a \quad m_{y,u} = 0 \quad m_{y,w} = \frac{a H}{k_y} = \frac{H}{2 k_y} \frac{d C_L}{d a} = -\frac{1}{2} \frac{d C_M}{d a k_y}$$

$$m_{y,q} = \frac{K}{2} \left( \frac{l}{k_y} \right)^2 \left( \frac{s}{S} \right) \left( \frac{d C_{Lc}}{d a c} \right) \eta_c = \frac{F}{k_y} \quad m_{y,w'} = m_{y,q} \frac{d \varepsilon}{d a} = \frac{1}{2} m_{y,q}$$

H = relación metacéntrica

$c' = \frac{2}{C_L} \frac{d C_D}{d C_L}$  "c = cuerda media del ala" l = distancia del C. G. al eje de giro del timón de altura.

K = coeficiente que puede tomarse igual a 1,25.

s = Superficie horizontal de cola.

S = Superficie alar.

$\frac{d C_{Lc}}{d a c}$  Inclinación de la curva del coeficiente de sustentación

$$B = z_w + m_{y,q} + m_{y,w'} = a + 1,5 \frac{F}{k_y}$$

$$C = m_{y,q} z_w + \mu m_{y,w} = \frac{a}{k_y} [F + \mu H]$$

$$D = x_u C + \frac{1}{2} \mu C_L m_{y,w} \text{sen } \Theta_1 - m_{y,q} x_w z_u + \frac{1}{2} C_L m_{y,w'} z_u = \left[ 2 c' + \frac{a \mu H}{k_y} \right] \frac{1}{2} C_D + \frac{F}{k_y} [3 - 2 c'] \frac{1}{4} C_L^2 \quad (11)$$

$$E = \frac{1}{2} \mu C_L m_{y,w} z_u = \frac{1}{2} \frac{a \mu H}{k_y} C_L^2$$

De ellos deducimos que, a igualdad de otras cosas, cuanto mayor sea el valor negativo de  $-\frac{d C_M}{d a}$ , es decir, de la estabilidad estática, menos probabilidades hay de inestabilidad dinámica, ya que será mayor el valor positivo de  $m_{y,w}$ . Esto se puede lograr aumentando la distancia de la cola al C. G. o aumentando la superficie de la cola. Lo último es preferible, ya que l entra en el denominador de  $m_{y,w}$ . Vemos también que cuanto mayor sea  $\Theta_1$  y la carga alar, tanto menos probabilidades tendremos de inestabilidad. Cuanto mayor sea el ángulo

de picado, estaremos en mejores condiciones. Igualmente no será conveniente un gran momento de inercia respecto al eje Y.

$\eta_c$  = Factor de rendimiento de la cola, que varía también con la forma y posición de la cola, pudiendo tomarse el valor medio 0,85.

$\varepsilon$  = Angulo de deflexión de la corriente de aire en la cola.

Examinando los valores de las citadas derivadas y observando que en vuelo uniforme  $m_{y,u} = 0$ , vemos que podemos tomar para los distintos coeficientes los valores aproximados siguientes:

lo de picado, estaremos en mejores condiciones. Igualmente no será conveniente un gran momento de inercia respecto al eje Y.

Sin embargo, desde el punto de vista del bombardeo en picado, nos interesa que  $\frac{D}{C} + \frac{B E}{C^2}$  sea lo mayor posible, es decir, teniendo en cuenta que, aproximadamente,  $\text{sen } \Theta_1 = -\frac{C_D}{C_L}$ , será preciso que

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\mu H}{F + \mu H} \right] C_D + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \frac{F (3 - 2 c')}{a (F + \mu H)} - \frac{\mu H (a k_y + 1,5 F)}{a (F + \mu H)^2} \right] C_L^2 \quad (12)$$

sea lo mayor posible.

Es decir, será necesario buscar un valor de  $\mu H$  muy grande. Por tanto, será conveniente una gran carga alar y una posición muy adelantada del C. G.

### V. CASO DE PICADO CON MOTOR

En estas condiciones, la estela ejerce influencia sobre el valor de las derivadas, y el problema se complica grandemente. Sin embargo, podemos dar una idea de aquella influencia.

### VI. INFLUENCIA SOBRE $m_{y,u}$

En vuelo en planeo, con los mandos bloqueados, hemos supuesto que  $m_{y,u}$  es nula. Sin embargo, al estar el motor en marcha, si el eje de tracción no pasa por el C. G., se produce un momento + Ti.

T = tracción.

i = distancia del eje de tracción al C. G.

Además, la estela en la cola depende de la tracción, es decir, de la velocidad, y, por tanto, la reacción en la cola será función de la tracción. En la actualidad, es muy poco lo que

se conoce de este asunto. Se puede tomar para  $m_{y,u}$  por este efecto en la cola, el siguiente valor aproximado:

$$m_{y,u} = -\frac{1}{k_y} \left[ \frac{K C_{Ma}}{1 + \frac{\pi D^3}{49^2 S C'T}} \right]$$

donde

$$2 (1 - K) = \frac{V}{T} \cdot \frac{d T}{d V}$$

$C_{Ma}$  = coeficiente de momento debido solamente al ala.  
D = diámetro de la hélice.

$$C'T = \frac{D^2}{S J_o^2} \cdot \frac{C_T}{\lambda^2}$$

$J_o = \frac{V}{n D}$  para tracción nula.

G = es la relación de la superficie de cola dentro de la estela.

Si queremos determinar el efecto de Ti en  $m_{y,u}$  basta observar que:

$$m_{y,u} = -\frac{1}{l \rho S V k_y} \frac{d M_T}{d u} = -\frac{i}{\rho V S l k_y} \frac{d T}{d V}$$

El signo negativo corresponde a suponer el eje de tracción por encima del C. G.

Si suponemos que la potencia disponible es constante:

$$TV = 75 \eta P = \text{constante.}$$

P = potencia en CV.

$\eta$  = rendimiento de la hélice = 0,8.

T = tracción en kilogramos.

V = velocidad en m/s.

Luego

$$\frac{d T}{d V} = \frac{60 P}{V^2}$$

y

$$m_{y,u} = + \frac{60 i P}{\rho V S l k_y V^2} = + \frac{30 i C_L}{(W/P) V l k_y}$$

W = peso del avión.

VII. INFLUENCIA EN  $x_u$ .

Esta influencia está representada únicamente por  $dT/dV$ . Es decir,

$$x_u = C_D - \frac{1}{\rho V S} \frac{dT}{dV}$$

Como el valor de  $C_D$  es el correspondiente al avión en vuelo planeado con la hélice parada, y es menor que con la hélice en marcha, a causa de la estela, se comprende que no se cometerá gran error al suponer que  $C_D$  es el correspondiente al planeo.

VIII. INFLUENCIA EN  $z_u$ .

Para determinar esta influencia habrá que determinar la que ejerce la estela sobre la sustentación.

No cabe duda que en un avión multimotor, en el que los motores van instalados en el borde de ataque del ala, ese incremento ha de tener bastante importancia.

Así, podemos establecer:

$$z_u = C_L + \frac{Si}{S} C_L = C_L \left[ 1 + \frac{Si}{S} \right]$$

$Si$  = Superficie del ala interferida.

IX. INFLUENCIA EN  $x_w$  Y  $z_w$ .

Por las mismas razones puede tomarse:

$$x_w = \frac{1}{2} C_L (1 - c') \left[ 1 + \frac{Si}{S} \right]$$

$$z_w = \frac{1}{2} \frac{d C_L}{d \alpha} \left[ 1 + \frac{Si}{S} \right]$$

X. INFLUENCIA EN  $m_{y\dot{w}}$ .

De la expresión  $m_{y\dot{w}} = \frac{H}{2 k_y} \frac{d C_L}{d \alpha}$  deducimos que la

influencia está caracterizada por la ejercida sobre  $H$  y  $\frac{d C_L}{d \alpha}$ .

El nuevo valor de  $H$  puede determinarse mediante resultados experimentales; pero, en general, podemos decir que el funcionamiento de la hélice da lugar a un pequeño movimiento hacia proa del lugar geométrico de las posiciones para el equilibrio indiferente; es decir, que  $H$  será reducido ligeramente. La influencia en  $\frac{d C_L}{d \alpha}$  puede considerarse también como despreciable.

$$-\mu m_{y\dot{w}} \left( x_w + \frac{1}{2} C_L \right) + \frac{1}{2} B \mu C_L a m_{y\dot{w}} = \frac{1}{2} \left[ Ba - Cc' \right] \frac{\mu C_L}{C^2} m_{y\dot{w}} = 15 \left[ Ba - Cc' \right] \frac{\mu i C_L^2}{C^2 (W/P) V l k_y}$$

que para grandes velocidades, que es el caso que nos interesa, esta variación será muy pequeña.

La influencia de la estela variará el factor de amortiguamiento en:

$$-\frac{1}{2} [aB - Cc'] \frac{\mu C_L}{C^2} \frac{1}{k_y} \left[ \frac{K C_{Ma}}{\pi D^2} \right]$$

Sabemos que:

$$C_{Ma} = \sim C_{Mo} - (d - x) C_L + 0,15 h C_L^2$$

donde

$C_{Mo}$  = Coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico.

$d$  = Distancia del centro aerodinámico al borde de ataque en tantos por ciento de cuerda.

$x$  = Abscisa del C. G.

$h$  = Ordenada del C. G.

Estas coordenadas se toman respecto a la cuerda aerodinámica y su perpendicular por el borde de ataque.

En general, el término  $Ba - Cc'$  suele ser positivo, por lo cual, para grandes velocidades, en que  $C_L$  es pequeño, con

XI. INFLUENCIA SOBRE  $m_{y\dot{q}}$ .

La hélice ejerce influencia sobre  $m_{y\dot{q}}$  en dos aspectos:

- 1.º Directamente por el momento que ejerce la tracción.
- 2.º Por la acción de la estela sobre la cola.

La influencia primera puede despreciarse en la mayoría de los casos, ya que el eje de tracción no suele pasar lejos del C. G.

Para la segunda, puede obtenerse una estimación aproximada multiplicando el efecto de la parte de cola dentro de la estela por  $(1 + v/V)^2$ , donde  $V$  es la velocidad del avión y  $v$  es la velocidad de la estela.

XII. INFLUENCIA SOBRE  $m_{y\dot{w}}$ .

De  $m_{y\dot{w}} = m_{y\dot{q}} \frac{d \varepsilon}{d \alpha}$  y suponiendo como anteriormente que

$\frac{d \varepsilon}{d \alpha} = \frac{1}{2}$  el nuevo valor de  $m_{y\dot{w}}$  será la mitad del nuevo de  $m_{y\dot{q}}$ .

XIII. INFLUENCIA TOTAL SOBRE EL MOVIMIENTO

Ya podemos determinar la influencia examinada sobre los coeficientes B C D y E, y, por tanto, sobre las distintas raíces de la cuadrada de  $\lambda$ .

La influencia en B y C ha de ser muy pequeña, ya que tendrá un valor ligeramente mayor, que quedará compensado con la disminución de H. En general, se puede decir que B y C son mayores que en vuelo a motor parado.

La influencia sobre E, por no ser ya  $m_{y\dot{w}}$  cero, consistirá en agregar a  $\frac{1}{2} a \mu \frac{H C_L^2}{k_y}$  el término  $-\frac{1}{2} \mu C_L a m_{y\dot{w}}$ . Es decir, que cuando el eje de tracción está por encima del C. G., el incremento de tracción, con disminución de velocidad, produce un efecto estabilizador, y cuando está por debajo, un efecto inestabilizador.

Por tanto, así como por el hecho de estar el motor en marcha la "estabilidad estática longitudinal" aumenta, no sucede lo mismo con la "estabilidad dinámica longitudinal".

La influencia sobre D, por la misma razón anterior, consiste en agregar a su valor anterior de (11) el término  $-\mu m_{y\dot{w}} (x_w + \frac{1}{2} C_L)$ .

Como resumen, podemos decir que con motor en marcha:

1.º B y C aumentan, y, por tanto, que el amortiguamiento correspondiente a las raíces grandes de  $\lambda$  es más rápido que a motor parado, y, por tanto, conveniente desde el punto de vista del bombardeo en picado.

2.º El factor de amortiguamiento correspondiente a las raíces pequeñas (12) vendrá aumentado por la tracción de la hélice en:

perfiles que tengan un  $C_{mo}$  elevado, existirá peligro de inestabilidad.

Dada la complejidad de las fórmulas obtenidas y los distintos factores que en ella intervienen, es imposible dar normas generales respecto a los valores de los diversos elementos del avión; pero sí hemos conseguido mediante ellas llegar a suministrar al proyectista todos los medios necesarios para comprobar cómo se ha de comportar en un picado un avión determinado.

De esto él podrá obtener un compromiso entre los diversos elementos para llegar a que el avión responda del modo más conveniente al fin a que se le destina.

REFERENCIAS

Ref. (1).—Aerodynamic Theory (V.-5).  
 Ref. (2).—Glauert, H. A. Non.—Dimensional form of the Stability Equations of an Aeroplane Br. and M. 1093. 1927.  
 Ref. (3).—The Experimental Determination of the moments of Inertia Airplanes. Naca. T. R., núm. 467.  
 Ref. (4).—Routh. E. J. Rigid Dynamic.  
 Ref. (5).—Aerodynamic Theory (V.-5).