

Aerotecnia

La teoría de la vibración en el amaraje de hidroaviones

Por JOSÉ CUBILLO FLUITERS

Teniente coronel de Aviación, Ingeniero militar y geógrafo, Profesor de Mecánica Elástica aplicada, en la Escuela Superior Aerotécnica

EN cualquier cuestión de la ingeniería aeronáutica aparece, con tal relieve, la acción de los *esfuerzos dinámicos*, que puede decirse, sin incurrir en exageraciones, que esa ingeniería es la ciencia de la vibración.

Como una muestra de este aserto se va a presentar la teoría del *amaraje* o *despegue* de hidroaviones, en cuyos fenómenos aparece un problema de *vibraciones acopladas*, que es al que se va a dedicar preferentemente la atención, no tratando de lo demás que ocurre en dichos fenómenos más que de aquello que sea indispensable para el principal objeto de este trabajo.

Naturaleza física del fenómeno.—El ingeniero F. Séewald, del Laboratorio Aeronáutico Alemán, ha puntualizado bien las circunstancias del fenómeno del amaraje, que es, con una simple inversión de la dependencia respecto al tiempo, el mismo que el del despegue: el flotador o flotadores del hidroavión se sumergen más o menos tangencialmente en el agua y la creciente resistencia que de ello resulta va frenando el movimiento, a la vez que disminuye paulatinamente la acción sustentadora del aire sobre las alas.

Pero si así se fijan los rasgos generales del fenómeno, queda fijar, de un modo preciso, cuál es la naturaleza de la resistencia del agua, puesto que de ello dependerá la forma de expresión matemática que se adopte.

Se ve que esa resistencia se compondrá: de la energía consumida en el oleaje que se forma; del rozamiento de los flotadores con el agua y, finalmente, constituyendo lo más importante de la resistencia, de la fuerza de inercia de una cierta masa de agua, en proporción que depende de la forma del cuerpo sumergido, que recibe aceleración creciente por la acción del movimiento.

Si la sumersión de los flotadores es suficientemente rápida, como ocurre en la realidad, esta última parte de la resistencia adquiere en seguida un valor suficientemente grande para que se pueda prescindir de los otros componentes, y así, en la representación matemática del fenómeno, que se hará con arreglo a la teoría de W. Pabst, se supondrá que no existe otra causa de resistencia que la última citada.

Con esta hipótesis es ya una primera consecuencia la de que las leyes de semejanza de Froud y Reynolds no tienen intervención en el fenómeno y, aun la de Newton, ha de ser sustituida por la de Cauchy en el caso de flotadores sin quilla.

En efecto: el teorema de la impulsión hace ver inmediatamente que para que se comunicase una aceleración finita a la masa de agua, que es incompresible, sería

preciso que actuase una fuerza *infinita* que, no existiendo en la realidad, exige la intervención de fuerzas elásticas, que no pueden ser otras que las desarrolladas en toda la estructura del hidroavión.

La experiencia lo comprueba así, pues los ensayos con acelerómetro indican que las aceleraciones de las distintas partes del *hidro* no son las mismas: tienen una ley de disminución en la vertical ascendente a partir del flotador.

Resulta entonces que en el amaraje no intervienen solamente fuerzas de inercia, sino muy especialmente fuerzas elásticas y la ley de semejanza aplicable será la de Cauchy, que exige que para que puedan llamarse semejantes dos fenómenos dinámicos de esta índole, es

necesario que el llamado *número de Cauchy*, $c = v \sqrt{\frac{\delta}{E}}$ tenga el mismo valor, viéndose así que el choque del amaraje dependerá, más que del cuadrado, de la simple velocidad.

Como en el caso de existir quilla se verá que el choque depende del cuadrado, se comprende la norma alemana de admitir la proporcionalidad a la potencia 1,5 de dicho elemento.

Fijada la naturaleza del fenómeno habrá que determinar la masa de agua que recibe aceleración de parte del hidro, y claro es que ello dependerá del estado del mar, dependiente, a su vez, de la fuerza del viento, de su persistencia, de la distancia desde la que sople sin obstáculo intermedio, de la magnitud del fondo y, por otro lado, de la forma en la que se realice el amaraje.

Todos estos elementos que entran en juego, son de difícil representación, no ya cualitativa, sino cuantitativa, por lo que será preciso recurrir a esquematizar el problema, lo que no hará perder utilidad al estudio, puesto que permitirá hacer comparaciones justas aplicando las mismas hipótesis a diferentes aviones, que es, por otra parte, lo que ocurre en la mayor parte de las cuestiones de matemática aplicada.

Ecuación de la vibración producida en el amaraje. Esquema de dos masas.— Como una primera aproximación del problema que sirve desde luego para fijar su naturaleza, se va a plantear en la hipótesis de máxima simplificación consistente en suponer el hidroavión reducido a una sola masa M_1 concentrada en un punto y, por lo tanto, el sistema total estará representado por el esquema de la figura 1; la masa M_1 del avión enlazada a la masa M_2 de agua por un medio *elástico* sin masa, que es la hipótesis habitual en la teoría de la vibración.

El sistema de dos masas así constituido tendrá un movimiento que se determinaría en seguida aplicando al *enlace* elástico una masa *reducida*, cuya inversa fuese la suma de las inversas de las masas actuantes, según se manifiesta en la teoría de la vibración.

Es preferible, sin embargo, establecer directamente la ecuación del movimiento de cada masa porque ello servi-

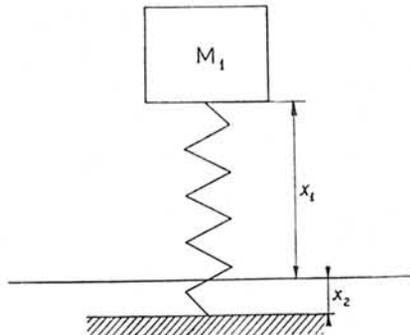


Fig. 1.

rá para, generalizando la deducción, aplicar lo obtenido al caso de sistema de *tres* masas más aproximado a la realidad.

Si se designa por *c* la rigidez específica del enlace elástico y por *e* su deformación total suponiéndole de la longitud ficticia *l* y, por otro lado, se llama ρ a un factor variable de 0 a 1 en la duración del amaraje y por *G* el peso del avión, se tendrán las siguientes ecuaciones del movimiento de cada masa:

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = ce - \rho G \quad , \quad M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -ce \quad [1]$$

puesto que la fuerza sustentadora irá disminuyendo y, al final del amaraje, insistirá todo el peso *G*. En realidad, debería ponerse esta variabilidad de ρ con el tiempo, pero se prescinde de ella por no compensar la dificultad que resultaría de ello, el resultado que se obtendría.

Entre las longitudes x_1 y x_2 deberá existir, en cada momento, la relación:

$$x_1 - x_2 = l - e \quad [2]$$

puesto que la deformación total del enlace elástico será la diferencia algébrica entre las elongaciones de ambas masas.

De [2] se deduce:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} = - \frac{d^2 e}{dt^2} \quad [3]$$

y combinando las [1] y [3] resulta:

$$M_r \frac{d^2 e}{dt^2} + ce - \rho M_r g = 0 \quad [4]$$

siendo

$$M_r = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad [5]$$

Es decir, como se había anunciado, la ecuación del movimiento de un sistema simple con la masa reducida [5]. Será, pues, una vibración cuya *pulsación* tiene el valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M_r}} \quad [6]$$

con la ley general

$$e = A \text{ sen } (\omega t - \varphi) + \frac{\rho g}{\omega^2} \quad [7]$$

siendo

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\rho g}{\omega}\right)^2 + v_a^2} \quad , \quad \varphi = \text{ang. tg. } \frac{g}{v_a} \cdot \frac{\rho}{\omega} \quad [8]$$

cantidades determinadas por las condiciones iniciales:

$$t = 0; e = 0 \quad , \quad \frac{dx_1}{dt} = v_a \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = 0$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = -v_a \quad [9]$$

La cantidad v_a será la componente normal a la trayectoria de la velocidad de amaraje, figura 2, la cual, por otra parte, será la correspondiente al ángulo de ataque máximo.

La vibración no es amortiguada, como era lógico esperar, puesto que no se ha tenido en cuenta ninguna causa de amortiguamiento, pero, aunque en la realidad exista, y por lo tanto no represente el resultado hallado exactamente esa realidad, sí permite ver la naturaleza vibratoria del fenómeno y por consiguiente establecer, desde luego, la primera consecuencia de que los esfuerzos producidos en el amaraje, en toda la estructura del avión, serán *alternativos* y, por lo tanto, deberán ser sus elementos aptos para resistir extensión y compresión.

Además se obtiene también el valor del *factor dinámico* o de *amplificación*, puesto que la carga estática equivalente a la acción dinámica será de la forma:

$$P = ce_{\text{máx.}} \quad [10]$$

y, por lo tanto, será:

$$P = M_r \omega^2 \left(A + \frac{\rho g}{\omega^2} \right) = \sqrt{(\rho g M_r)^2 + (v_a \omega M_r)^2} + \rho g M_r \quad [11]$$

cuya fórmula indica que el referido factor es bien distinto del que resultaría de la simple aplicación de la ley de Poncelet.

En efecto; esta ley está contenida en la fórmula hallada, pues si se supone que es $M_2 = \infty$, que es el caso de aterrizaje de aviones contra un elemento inmóvil, con $v_a = 0$ y $\rho = 1$, resulta $M_r = M_1$ y la fórmula [11] se convierte en:

$$P = M_1 g + M_1 g = 2 G \quad [12]$$

que es la ley de Poncelet para los esfuerzos por choque.

En los hidroaviones se podrá expresar M_2 por una *fracción* de la masa del aparato, por ejemplo, un 20 por 100 y entonces es conveniente presentar la fórmula en la forma

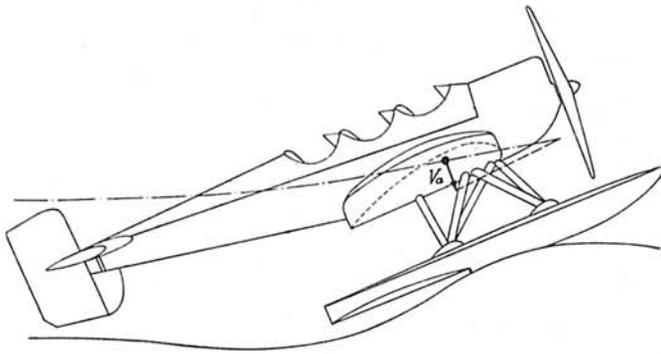


Fig. 2.

siguiente, obtenida además con las simplificaciones que se van a indicar.

Si es $k = \frac{M_2}{M_1}$ será:

$$M_r = \frac{k}{1+k} M_1 = \psi^2 M_1 \quad [13]$$

viéndose que la cantidad $\frac{k}{1+k}$ será de valor inferior a la unidad (en el caso citado, 0,6); por otro lado, siendo $\rho < 1$ y teniendo en cuenta que c es una cantidad muy elevada (fuerza para producir la deformación unidad en un sistema lineal equivalente a todo el hidro), resultará que se puede poner:

$$P_{\text{máx.}} = \sqrt{v_a^2 \omega^2 M_r^2} = v_a \sqrt{c M_r} = v_a \psi \sqrt{c M_1} \quad [14]$$

Solicitud del material. — Conviene llamar la atención acerca del hecho de que la solicitud del material, por el choque del amaraje, es independiente de las dimensiones del avión como debía preverse.

La fórmula [14] indica que para la misma v_a y el mismo valor de ψ , el de $P_{\text{máx.}}$ es proporcional a $\sqrt{c M_1}$ y, por otro lado, e , que es la rigidez, será proporcional a una longitud λ y M_1 lo será a un volumen λ^3 ; por lo tanto, resulta ser $P_{\text{máx.}}$ proporcional a λ^2 ; es decir, a una área, por lo tanto, siendo la solicitud o coeficiente de esfuerzo.

$$\sigma = \frac{P}{\lambda^2}$$

se ve que es

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = 1$$

es decir, sin dimensiones.

Choque excéntrico. — Si en todo lo anterior se ha supuesto el choque *centrado*, se puede considerar el caso de choque excéntrico por el método sencillo de la masa *reducida*:

$$M'_r = M_1 \frac{i^2}{i^2 + r^2} \quad [15]$$

Siendo i el trazo de inercia del sistema y r la distancia del punto de aplicación del choque al centro de gravedad de M_1 .

Esquema de tres masas. — El cálculo expuesto, aunque fija la naturaleza vibratoria del fenómeno, no es de resultados *prácticos* para el cálculo del *hidro*, puesto que supone que todo él es rígido y la elasticidad está reducida a la del fondo del flotador, por lo que esta suposición conduce al mismo *factor dinámico* o de multiplicación de carga para toda la estructura.

Es preciso plantear el problema de otro modo que se acerque más a la realidad, lo que se consigue mediante el procedimiento habitual en la teoría de la vibración, de hacer uso de esquemas de mayor número de masas, ya que el caso real es el de infinitas masas infinitesimas.

Se tomará, pues, un esquema de *tres masas*, suponiendo el avión formado por dos: una m_1 , constituida por el motor, las alas y el fuselaje, es decir, lo que pudiera llamarse *estructura de vuelo*, y otra m_2 , formada por el flotador o flotadores o *estructura de flotación*, y ambas masas enlazadas por elasticidades, cuya masa no se considera; c_a y c_p figura 3, resultando el sistema, cuyo movimiento hay que estudiar, formado por estas dos masas, y la m_3 de agua arrastrada, cuyo enlace elástico con la masa m_2 se supone de rigidez c_2 .

Puesto que las masas, en las que resulta descompuesto el sistema total, pueden tener movimientos relativos de traslación y rotación, es preferible, por la comodidad que

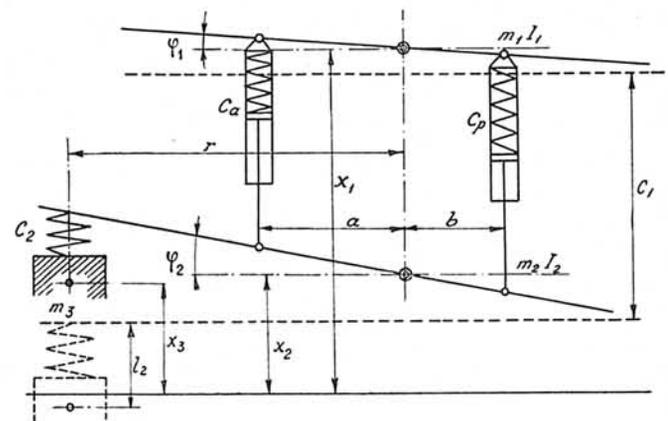


Fig. 3.

produce, emplear las ecuaciones de *Lagrange* para establecer las del movimiento, cuyas ecuaciones son, según se estudia en *Mecánica Racional*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad [16],$$

siendo:

T la energía del sistema total.

\dot{q}_i la derivada, respecto al tiempo, de esa coordenada.

q_i la coordenada del punto considerado.

Q_i la fuerza exterior.

Teniendo en cuenta los géneros de movimientos dichos será:

$$T = \frac{m_1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{I_1}{2} \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \frac{I_2}{2} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + \frac{m_3}{2} \left(\frac{dx_3}{dt} \right)^2$$

la suma de las energías cinéticas de traslación y rotación o energía total del sistema.

Para la masa m_1 se hará $q_1 = x_1$ en la ecuación [16], y entonces como se verifica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_1} \right) = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad \frac{\delta T}{\delta x_1} = 0$$

y como la deformación de los enlaces elásticos es siempre la diferencia de las elongaciones de cada masa, resultará que la fuerza actuante valdrá:

$$Q_i = c_a (x_1 + a \varphi_1) - (x_1 + l_1 + a \varphi_1) + c_p (x_1 - b \varphi_1) - (x_2 + l_1 - b \varphi_1).$$

Resultará, por lo tanto, dicha ecuación [16]:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (c_a + c_p) C_{12} + (c_a a - c_p b) \varphi = 0 \quad [17],$$

como debía ser, puesto que las rigideces están *acopladas* en paralelo y entonces la rigidez *compuesta* es la suma de las rigideces, existiendo el término complementario, debido a la posibilidad de movimiento de rotación.

Haciendo $q_i = \varphi_1$ en [16], resulta igualmente:

$$I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + (c_a a - c_p b) e_{12} + (c_a a^2 + c_p b^2) \varphi_{12} = 0 \quad [18]$$

y sucesivamente, suponiendo q_i igual a las diferentes coordenadas:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (c_a + c_p) e_{12} - (c_a a - c_p b) \varphi_{12} + c_2 e_{23} = 0 \quad [19]$$

$$I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - (c_a a - c_p b) e_{12} - (c_a a^2 + c_p b^2) \varphi_{12} + c_2 r e_{23} = 0 \quad [20]$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} - c_2 e_{23} = 0 \quad [21]$$

Considerando las relaciones análogas a la [2] que se estableció en el esquema de dos masas, o sea:

$$x_1 - x_2 = l - e_{12} \quad , \quad x_2 + r \varphi_2 - x_3 = l_2 - e_{23} \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi \quad [22]$$

y combinándolas con las anteriores, se obtienen las siguientes ecuaciones, que representan una vibración *acoplada*, puesto que el movimiento de una masa no puede realizarse sin provocar el de las otras dos:

$$\frac{d^2 e_{12}}{dt^2} + (c_a + c_p) m_{11} e_{11} + (c_a a^2 - c_p b) m_{12} \varphi_{12} - \frac{c_2}{m_2} e_{23} = 0 \quad [23]$$

$$\frac{d^2 \varphi_{12}}{dt^2} + (c_a a - c_p b) I_{12} e_{12} + (c_a a + c_p b^2) I_1 \varphi_{11} - \frac{c_2}{I_2} r e_{23} = 0 \quad [24]$$

$$\frac{d^2 e_{23}}{dt^2} + c_2 \left(m_{23} + \frac{r^2}{I_2} \right) e_{23} - \left(\frac{c_a + c_p}{m_2} + \frac{c_a a - c_p b r}{I_2} \right) e_{12} - \left(\frac{c_a a - c_p b}{m_2} + \frac{c_a a^2 + c_p b^2}{I_2} r \right) \varphi_{12} = 0 \quad [25]$$

Este sistema podría resolverse en forma análoga a la empleada en las vibraciones de varias masas en la torsión, incluso el método gráfico de Gumbel, pero resulta, de todos modos, de bastante complicación, por lo que puede sustituirse ventajosamente por la resolución simplificada que sigue.

Simplificación del esquema de tres masas. — Se obtiene gran simplificación, aun empleando este esquema de tres masas, si se supone el choque *central* ($r=0$), y además, que la rigidez de los dos enlaces elásticos es la misma: $c_a = c_p = \frac{1}{2} c_1$ y, por fin, el esquema simétrico: $a = b = \frac{1}{2} l$.

Entonces las acciones dinámicas, para las masas m_1 y m_2 , serán: $P_1 = c_1 e_{12}$ y $P_2 = c_2 e_{23}$ y las ecuaciones se transforman en las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 e_{12}}{dt^2} + c_1 m_{12} e_{11} - \frac{c_2}{m_2} e_{23} &= 0 \\ \frac{d^2 e_{23}}{dt^2} + c_2 m_{23} e_{23} - \frac{c_1}{m_1} e_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [26]$$

que constituyen las conocidas ecuaciones de vibraciones acopladas de *dos* masas, de resolución inmediata, dando lugar a una ecuación resultante de cuarto orden, cuya solución particular puede obtenerse fácilmente mediante la forma exponencial

$$e_{12} = K e^{i \omega t}$$

Poniendo las ecuaciones en la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 e_{12}}{dt^2} + \alpha_1 e_{12} - \beta_1 e_{23} &= 0 \\ \frac{d^2 e_{23}}{dt^2} + \alpha_2 e_{23} - \beta_2 e_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [27]$$

se obtiene la siguiente ecuación resultante:

$$\frac{d^4 e_{12}}{dt^4} + (\alpha_2 + \alpha_1) \frac{d^2 e_{12}}{dt^2} + (\alpha_2 \alpha_1 - \beta_1 \beta_2) e_{12} = 0 \quad [28]$$

La solución general de esta ecuación es de la forma

$$e_{12} = A_1 \sin \lambda_1 t + B_1 \cos \lambda_1 t + C_1 \sin \lambda_2 t + D_1 \cos \lambda_2 t \quad [29]$$

mientras que para e_{23} resulta el valor

$$e_{23} = \frac{1}{\beta_1} \frac{d^2 e_{12}}{dt^2} + \frac{\alpha_1}{\beta_1} e_{12} \quad [30]$$

que está conocido en cuanto se conozca el primero.

Los valores de λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^4 + (\alpha_2 + \alpha_1)\lambda^2 + (\alpha_2\alpha_1 - \beta_1\beta_2) = 0 \quad [31]$$

o sea:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} [(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\beta_1\beta_2}] \quad [32]$$

resultando posibles dos modos de vibración cuyos períodos son:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad " \quad T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \quad [33]$$

La determinación de las constantes se hará, como siempre, por las condiciones iniciales y así, debiendo ser para $t = 0$:

$$x_1 = l_1 + l_2 \quad " \quad x_3 = 0 \quad " \quad \frac{dx_1}{dt} = -v_a$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0 \quad " \quad x_2 = l_2 \quad " \quad \frac{dx_2}{dt} = -v_a$$

que combinadas con las

$$x_1 - x_2 = l_1 - e_{11} \quad " \quad x_2 - x_3 = l_2 - e_{23}$$

producen:

$$e_{120} = 0 \quad " \quad e_{230} = 0 \quad " \quad \frac{de_{120}}{dt} = 0 \quad " \quad \frac{de_{230}}{dt} = v_a$$

resultarán las constantes

$$B_1 = D_1 = 0 \quad " \quad A_1 = \frac{\beta_1}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} v_a$$

$$C_1 = \frac{\beta_1}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} v_a \quad [34]$$

Las leyes de esfuerzos estáticos equivalentes sobre las masas M_1 y M_2 se deducirán multiplicando las deformaciones por las rigideces respectivas, es decir, serán:

$$P_1 = v_a c_1 \left[\frac{\beta_1}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \text{sen } \lambda_1 t - \frac{\beta_1}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \text{sen } \lambda_2 t \right] \left. \right\} [35]$$

$$P_2 = v_a c_2 \left[-\frac{\lambda_1^2 - \alpha_1}{\lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \text{sen } \lambda_1 t + \frac{\lambda_2^2 - \alpha_1}{\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \text{sen } \lambda_2 t \right]$$

a cuyas expresiones se les puede dar forma más armónica, estableciendo las siguientes cantidades relacionadas con las que intervienen en la cuestión:

- $m = m_1 + m_2$ (masa total del avión)
- $m_1 = pm$ (superestructura: estructura de vuelo)
- $m_2 = qm$ (estructura de flotación)
- $m_3 = rm$ (masa de agua arrastrada)
- $c_1 = sc$ (rigidez entre m_1 y m_2)
- $c_2 = tc$ (rigidez entre m_2 y m_3)

Por las leyes de acoplamiento elásticos (serie) deberá ser:

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

Entonces, designado también por

$$A = \frac{1}{2} \left(s \frac{p+q}{pq} + t \frac{q+r}{qr} \right)$$

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(s \frac{p+q}{pq} - t \frac{q+r}{qr} \right)^2 + \frac{4st}{q^2}} \quad " \quad C = s \frac{p+q}{pq}$$

$$K_1 = \frac{\frac{ts}{q}}{2B\sqrt{A+B}} \quad " \quad K_2 = \frac{\frac{ts}{q}}{2B\sqrt{A-B}}$$

$$K_3 = \frac{t}{2B} \frac{A+B-C}{\sqrt{A-B}} \quad " \quad K_4 = \frac{t}{2B} \frac{A-B-C}{\sqrt{A-B}}$$

resulta, por fin:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c}{m} (A+B)} \quad " \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{c}{m} (A-B)} \quad [36]$$

de forma completamente análoga a la de las pulsaciones de vibración simple de una masa m con una rigidez elástica c .

Los esfuerzos equivalentes estarán expresados por

$$P_1 = v_a \sqrt{cm} (K_1 \text{sen } \lambda_1 t - K_2 \text{sen } \lambda_2 t) \left. \right\} [37]$$

$$P_2 = v_a \sqrt{cm} (-K_3 \text{sen } \lambda_1 t + K_4 \text{sen } \lambda_2 t)$$

Las leyes halladas indican, como corresponde a las ecuaciones diferenciales del movimiento, de forma lineal, que la solución general es la *suma* de las soluciones parciales, o sea, que la vibración real es la superposición de las dos formas de vibrar que *no están* en serie armónica, como ocurre siempre en el caso de varias masas, y ninguna de esas formas representa el *ciclo* de la vibración real que, en este caso, no es simple, puesto que sólo se repiten las circunstancias del fenómeno para una frecuencia que sea el mínimo común múltiplo de las frecuencias de las dos parciales halladas.

Estas formas de vibrar son diferentes, siendo una de ellas con *un nodo* y la otra con *dos nodos*.

Influencia del amortiguamiento. — El problema ha sido planteado sin tener en cuenta la existencia de amortiguamiento que en la realidad existirá sin embargo, puesto que a la *histéresis* del material se unirá el efecto de empalmes, articulaciones, etc., y el tener en cuenta este amortiguamiento no ofrece dificultad desde el punto de vista teórico, puesto que puede, desde luego, aplicarse la ley de *Planck-Konno*, de proporcionalidad a la velocidad de deformación, es decir, poner dicho amortiguamiento en la forma $\beta \frac{de}{dt}$; la dificultad proviene de la apreciación *cuantitativa*, para dar valores numéricos a β , no habiendo otro medio que recurrir a ensayos, remitiendo al lector al trabajo que sobre este asunto se publicó en esta Revista en julio de 1933 (pág. 374).

A este respecto se añadirá ahora, que si en los metales el amortiguamiento por *histéresis* es pequeño por debajo del límite elástico, es, por el contrario, apreciable por

encima de él, especialmente en el *duraluminio*, en el que se aprecian dobladuras y deformaciones permanentes que suponen un esfuerzo muy superior al *permitido*, sin que se haya ocasionado la rotura, lo que únicamente puede explicarse por la circunstancia dicha.

Pero en cambio, dentro del límite elástico la influencia, como se ha hecho notar, es muy pequeña y no hay comparación entre la dificultad mayor del cálculo al tenerla en cuenta y la pequeña diferencia cuantitativa que resulta con el caso de suponer que no existe fricción.

Únicamente cuando se trate de *duraluminio*, se puede tener en cuenta la influencia del amortiguamiento de un modo *indirecto*, es decir, tomando para valor del máximo esfuerzo del choque de amaraje el de la *mayor* de las *amplitudes* de las vibraciones parciales, en lugar de *sumar* ambas, como de un modo aproximado se haría en otro caso.

Y se dice de un modo aproximado, porque tratándose de vibraciones de distinto período, su superposición *no* tiene por amplitud su suma algébrica; en efecto, ya se ha dicho que ni siquiera forman serie armónica; por ejemplo, en hidros de 3 Tm., la parcial más lenta es de 15 *hertzios* y la más rápida de 70 *hertzios* aproximadamente.

Se justifica el modo de proceder, porque si se fija la atención en las expresiones [37], que dan los valores de P_1 y P_2 , se ve que siendo en la práctica $K_1 > K_2$ y $K_3 < K_4$, en la superestructura es mayor la amplitud de la parcial más lenta, y se puede suponer que al alcanzar ésta la amplitud, la otra se ha amortiguado ya suficientemente, y en la estructura de flotación al alcanzar la amplitud la vibración más rápida, la más lenta tiene aún pequeño valor.

Esta apreciación conduce en los hidros de 3 Tm. a un *factor dinámico* o de amplificación de la carga estática, de valor 6 aproximadamente para la estructura de vuelo.

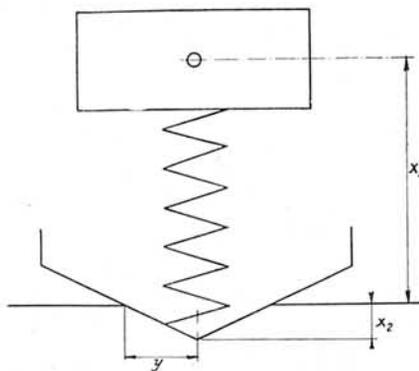


Fig. 4.

Es interesante hacer constar que la naturaleza del fenómeno explica que hayan fracasado las tentativas de intercalar órganos elásticos, como se hace en los aviones terrestres para amortiguar el choque, pues, sobre todo en el despegue, podría ocurrir que el efecto de la rápida variabilidad de la masa de agua acelerada, en combinación con la baja frecuencia de la vibración del conjunto, diese lugar a inestabilidades que ocasionasen la rotura en for-

ma análoga a lo que ocurre en las vibraciones forzadas *pseudoarmónicas*.

Consecuencia importante. — Resalta en el estudio hecho la circunstancia de que, no sólo hay que atender al factor dinámico de amplificación de la carga, sino muy *especialmente* a que existen esfuerzos *alternativos* como consecuencia de la vibración y, por lo tanto, deberá aplicarse los coeficientes de esfuerzo a la *fatiga* de los materiales empleados.

Caso de flotadores o canoa con quilla. — Aunque en este caso, como se va a ver, no se produce vibración, se considera de interés completar el estudio con su examen, para deducir las importantes consecuencias de la comparación con el caso anterior.

Si se supone una cuña de longitud a unida a la masa m_1 , por un medio elástico sin masa, figura 4, que penetre en el agua con la velocidad $\frac{dx_2}{dt}$, resultará que la masa de agua arrastrada en cada momento de la sumersión, es variable con la anchura y, correspondiente a la profundidad x_2 , es decir, que será de la forma: $m_2 = f(y) = \zeta(x_2)$.

Para plantear la ecuación del movimiento, convendrá expresar la fuerza que actúa sobre el fondo del flotador, por la derivada, con respecto al tiempo, de la *cantidad de movimiento* de esa masa variable, es decir, en la forma:

$$P = \frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{dx_2}{dt} \right).$$

El equilibrio dinámico de las dos masas m_1 (hidro) y m_2 (agua), será:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= ce \\ \frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{dx_2}{dt} \right) &= -ce \end{aligned} \right\} \quad [38]$$

verificándose también que

$$x_1 - x_2 = l - e \quad [39]$$

Si se supone la quilla suficientemente aguda, y teniendo en cuenta que c será muy grande, se podrá poner:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

y entonces resulta:

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{dx}{dt} \right)$$

o bien:

$$m_1 \frac{dx}{dt} = - m_2 \frac{dx}{dt} + C \quad [39]$$

El valor de C se obtendrá observando que para $t = 0$; $m_2 = 0$; $\frac{dx}{dt} = v_a$ con lo que

$$C = m_1 v_a$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_a$$

luego será:

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_a \right) = m_1 v_a \frac{m_1 \frac{dm_2}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_a}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{dm_2}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \quad [40]$$

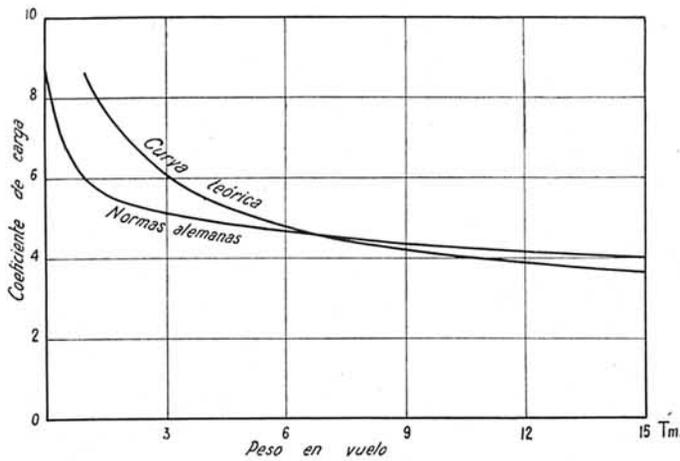


Fig. 5.

y usando el artificio de poner

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \text{tg. } \alpha \cdot \frac{dx}{dt}$$

y sustituyendo otra vez $\frac{dx}{dt}$ por su valor hallado, resulta:

$$P = \text{tg. } \alpha \cdot \frac{m_1^3 v_a^2}{(m_1 + m_2)^3} \cdot \frac{dm_2}{dy} = \text{tg. } \alpha \cdot \frac{v_a^2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^3} \cdot \frac{dm_2}{dy} \quad [41]$$

En la hidrodinámica se demuestra que la masa de agua acelerada por una quilla de longitud a y semianchura y , es de la forma

$$m_2 = \frac{\pi}{2} \delta (ay^2 - y^3) \quad [42]$$

de donde puede deducirse el valor de $\frac{dm_2}{dy}$ para $y = \frac{b}{2}$, siendo b la anchura máxima y, entonces, será:

$$P = \text{tg. } \frac{\alpha}{2} v_a^2 \frac{\frac{\pi}{2} \delta \left(ab - \frac{3}{4} b^2\right)}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)^3} \quad [43]$$

fórmula establecida por Kármán en 1929.

Se deduce de lo expuesto la importante consecuencia de que, en este caso, la elasticidad *no interviene* en el fenómeno y, por lo tanto, no existe vibración, resultando un factor dinámico *único* para toda la estructura y, por consiguiente, siendo mucho más pequeñas, relativamente a la masa, las fuerzas en juego sobre la estructura de vuelo que en la de flotación.

Si $\alpha = 180$ grados, resulta la fuerza $P = \infty$, es decir, deja de ser aplicable el cálculo para entrar otra vez en el caso de vibración con intervención de la elasticidad del sistema.

El cálculo hecho puede aplicarse también al choque excéntrico tomando, como antes se indicó, la *masa reducida*.

Finalmente, en los gráficos adjuntos (figs. 5 y 6) se indica la comparación de los resultados de la teoría, aplicada a hidros de hasta 15 Tm. de peso en vuelo, con los coeficientes de carga de las normas alemanas y, asimismo, la variación del coeficiente de carga, con el ángulo de abertura de la quilla, tanto según las referidas normas como con arreglo a la teoría expuesta.

La forma de la curva del gráfico de la figura 5 se comprende en seguida, por que, en cualquiera de los dos casos, sin quilla o con ella, es P proporcional a una superficie, o sea, en función del peso, proporcional a $\sqrt[3]{G^2}$ y puesto que la ley de semejanza aplicable es la de Cauchy, si es C un

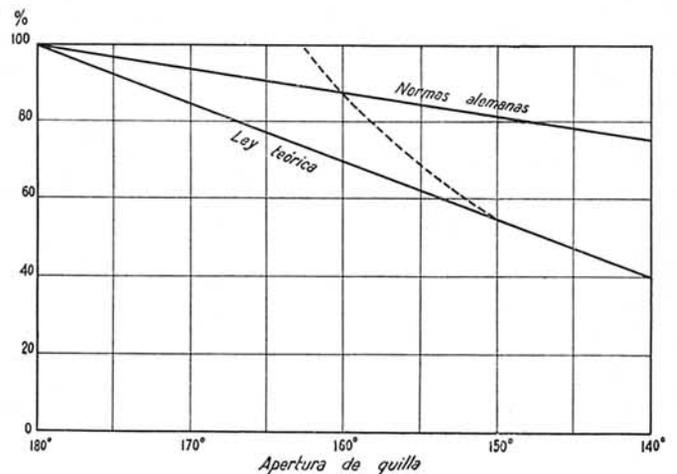


Fig. 6.

coeficiente que depende de la velocidad, el coeficiente de carga podrá ponerse en la forma:

$$c = \frac{C \sqrt[3]{G^2}}{G} = \frac{C}{\sqrt[3]{G}}$$

que hace ver que c y G están ligados por una *ley hiperbólica* de tercer grado.

Lo expuesto confirma que, en efecto, la teoría de la vibración es fundamental en la ingeniería aeronáutica.