AEROTECNIA

La Resistencia de Materiales en la Escuela Superior de Aerotecnia

Por JOSÉ CUBILLO FLUITERS

SIENDO el curso actual de 1932-33 el segundo en el que desempeñamos la citada asignatura, de la que nos encargamos en febrero del 31, de un modo inesperado, vamos imprimiendo a ella un carácter teórico-práctico que creemos será de utilidad para los lectores de esta revista tener conocimiento de él y saber así cómo se desarrolla en nuestra Escuela, en la que tan calladamente se va haciendo una labor cuyos frutos no están lejanos; cómo se desarrolla, decimos, la enseñanza de materia tan fundamental en la carrera del ingeniero, y especialmente en la ingeniería aeronáutica, como la Resistencia de Materiales: no será otra cosa lo que expongamos que una síntesis de las primeras explicaciones de esta asignatura.

La Resistencia de Materiales es un caso particular de otra cuestión mucho más amplia, pero también de fondo para la ingeniería aeronáutica: el «Equilibrio y movimiento de los medios continuos» estudiado ya por Cauchy en 1827, estableciendo ecuaciones que tienen su aplicación, tanto en la *Hidrostática*, como en la *Hidrodinámica* y la *Elasticidad*.

Si se intenta una clasificación de los principios que contiene la referida teoría, se encuentra que abarcan tres puntos principales:

1.° Estudio de los esfuerzos.

2.° Estudio de las deformaciones.

3.° Estudio de las relaciones entre esfuerzos y deformaciones.

El apartado primero está desarrollado cuando se tiene conocido el *tensor* que representa los esfuerzos en cada punto del material como función continua de las coordenadas que le determinan.

Al estudiar el segundo punto se halla que el *movimiento* que experimentan los elementos de un *continuo* se pueden descomponer en tres componentes:

1) Traslación.

2) Rotación.

3) Deformación pura.

En Aerodinámica son interesantes los componentes 1) y 2), especialmente el 2), que por medio de las primeras teorías de Stokes y Helmholtz conduce a problema tan fundamental como es el del *torbellino* en el movimiento del flúido; pero no interesa el inciso 3), que es en cambio el importante en la Resistencia de Materiales.

Esta, pues, se puede estudiar, o como problema *puramente matemático*, es decir, la teoría de la *Elasticidad*, o bien como tal *Resistencia*, sustituyendo el rigor matemático de la primera hipótesis de naturaleza *geométrica*, tanto sobre la constitución del material como sobre las deformaciones que experimenta.

De todos modos, actualmente es imposible pasarse, y menos en aerotecnia, sin considerar los materiales como *máquinas*, ya en equilibro, ya en movimiento, respondiendo a puntos de vista que no son de ahora, que fueron ya iniciados y muchos desarrollados por completo, por los Navier, Poisson, Lamé, Maxwell, Clebsch, Lord Kelvin y tantos otros matemáticos ilustres que hicieron ver la posibilidad de emplear la *mecánica pura* en tales cuestiones prácticas para llegar aun a introducir, como ha hecho en estos últimos tiempos Poincaré, la idea de la energía, con los no menos bellos métodos basados en sencillas consideraciones cinéticas ideados por parte de los sabios alemanes Föppl, Müller-Breslau, etc.

Se ve así que este modo de ver el asunto establece una conexión insospechada entre el aire y los elementos sólidos, que constituyen la nave aérea que surca la atmósfera formada por él; aire y sólido están regidos por las mismas leyes, que le son comunes tan sólo por el hecho de la *continuidad*, y si luego se piensa en que la hidrodinámica tiene analogías, también no esperadas, con los campos eléctricos y electromagnéticos, se verá que efectivamente hay una sustancia, un algo, un *substat* que está debajo y que es común a todas las cosas, revelando así una unidad sublime, en la sublime diversidad de la creación.

Si se toma por base las ideas que se van exponiendo se podrá decir que el problema de la resistencia de materiales consiste en «determinar el *tensor de esfuerzos* y el *tensor de deformación* para cada punto del material en función de las fuerzas aplicadas al mismo».

Claro es que esta definición demasiado abstracta requiere conocer lo que es un *tensor*.

Muy lejos nos llevaría esta definición si estableciéramos los principios necesarios para llegar a ella, porque si el enunciado del problema en la forma expuesta requiere definir el tensor, ¿qué no requerirá decir que «un tensor es un ser geométrico compuesto de dos sistemas asociados de componentes *covariantes* y *contravariantes*»?

Veamos de descender un poco de las alturas que hemos tenido la osadía de escalar y de dar un concepto más sencillo si no del tensor en general, al menos del tensor simétrico, que representa en cada punto, ya los esfuerzos del material, ya las deformaciones.

De este modo nos apartaremos del cálculo *tensorial* o diferencial absoluto, ideado por el entendimiento humano precisamente para estudiar aquellos problemas físicos o simplemente mecánicos, cuya naturaleza intrínseca requiere desligarse de todas las trabas que le impone la adopción de un sistema de coordenados determinado, y con ello, si perdemos en rigor y tecnicismo matemático moderno, ganaremos en claridad de exposición.

Vamos a intentarlo sin saber si tendremos la fortuna de conseguirlo.

Si en un punto del espacio se considera el haz de infinitas rectas que salen de él y en el mismo punto como *polo* se imagina una *función gráfica*, cuyos vectores sean de magnitud y dirección *funcionales*, ligadas de una manera *biunívoca* con las rectas del primer haz consideradas como *argumentales*, el conjunto de ambos sistemas es lo que constituye el *tensor*.

Por ser simétrico cumple la propiedad de que la proyección de un valor vectorial funcional sobre una dirección argumental cualquiera es igual a la del vector ligado a ésta sobre la dirección argumental del primero: es decir, si en un punto O, figura 1.ª, son OD_1 y OD_2 dos direcciones argumentales y V_1 y V_2 los vectores ligados a ellas, se tiene

$$O_m = O_n$$

siendo O_m y O_n las proyecciones de V_1 sobre D_2 y V_2 sobre D_1.

Resulta, así, bien sencilla la concepción de un tensor de esta naturaleza, el cual, como se sabe, está representado por la matriz simétrica siguiente:

$$\begin{array}{ccc} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{array}$$

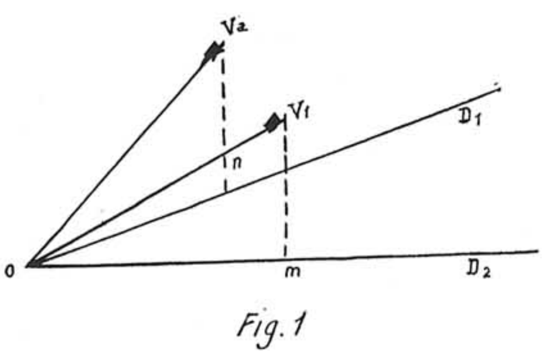

Fig. 1

con la diagonal principal formada por los esfuerzos normales y los demás elementos por los esfuerzos tangenciales; todos ellos ligados a los ejes coordenados.

Pero si hasta ahora hemos aclarado la idea de tensor, nos queda por explicar cómo es que el estudio de los esfuerzos y de las deformaciones conduce a un tensor.

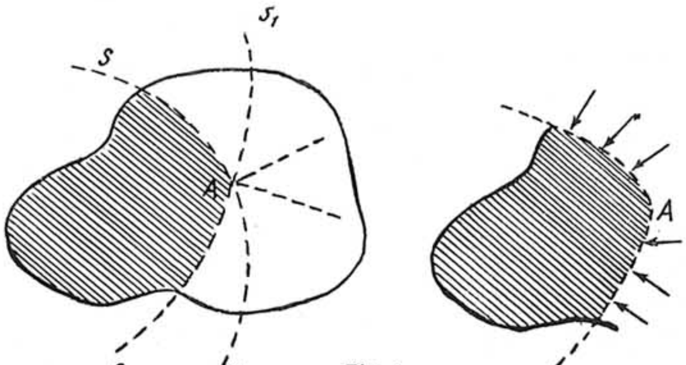

Fig. 2.

A ello se llega por consideraciones sumamente sencillas.

Basta, en efecto, aplicar las hipótesis de Lamé sobre la conducta de un material sometido a fuerzas.

Estas dos hipótesis son: 1.ª, que todo el material, como cualquier elemento o porción de él, está en equilibrio; y 2.ª, que los esfuerzos dependen de las deformaciones.

Consideremos, pues, un cuerpo cualquiera sometido a fuerzas, figura 2.ª; fijémonos en un punto A de dicho cuerpo e imaginemos que por él pasa una superficie S que divide al cuerpo en dos porciones; si la porción 1 ha de estar en equilibrio al imaginar separada la porción 2, como faltan todas las fuerzas que sobre esta porción se ejercían, habrá que suponer que sobre toda la superficie S aparecen fuerzas que sustituyen la presencia de la porción 2: entonces a cada elemento de superficie dS corresponderá una fuerza dF y el cociente $R = \frac{dF}{dS}$ es el esfuerzo unitario del punto A sobre la superficie dS; del mismo modo, imaginando otra superficie arbitraria S' S', resultaría otro esfuerzo $R' = \frac{dF'}{dS'}$ cuyos esfuerzos serían los valores de las fuerzas sobre la unidad de superficie si su intensidad no variase al convertirse dS y dS' en la unidad: habrá, pues, que definir de algún modo las infinitas superficies imaginadas en A para distinguirlas; lo más sencillo es determinarlas por su normal; resulta así un *haz argumental* en el punto A, formado por todas las normales, y una *función gráfica* de polo A, constituída por los vectores *esfuerzo*, ligados a cada una de las direcciones anteriores: ha surgido, pues, un *tensor*, el *tensor de los esfuerzos*.

Del mismo modo, imaginando de una parte el haz de las direcciones primitivas que unen el punto A a los infinitos próximos del *entorno* que le tiene por centro, y, de otra parte, los infinitos vectores representativos de las *defor-*

maciones lineales unitarias en magnitud y posición, de cada una de dichas direcciones resulta el tensor de la deformación.

La teoría de la Elasticidad llega, una vez establecidos ambos tensores, a la determinación de las relaciones entre ellos y con las fuerzas exteriores, relaciones que están expresadas por las llamadas condiciones en *la superficie límite*, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden de derivadas parciales, cuyas ecuaciones requieren, al integrarlas, la determinación de *funciones arbitrarias*, cuestión de difícil y aun imposible resolución en la mayoría de los casos; presentándose aquí, además, otra dificultad, que es la de no disponerse de número suficiente de ecuaciones, aunque las que se tienen fueran de posible integración, siendo necesario hacer hipótesis sobre la naturaleza de las funciones de deformación.

He aquí por qué la teoría de la Elasticidad sólo ha podido resolver cuestiones particulares, procediendo más bien por medios sintéticos que analíticos, es decir, en lugar de partir de las fuerzas exteriores para llegar a la resolución del problema, al contrario, establecer unas funciones de deformación que permitan la integración de las citadas ecuaciones; entonces determinar el tensor de esfuerzos y el sistema exterior *acordes* ambos con la deformación supuesta y así llegar a tener resuelto *un caso* de la práctica; aquel para el que fuese cierto el modo de solicitación obtenido en correspondencia con la ley de deformación supuesta, siendo los casos de deformación que obedezcan a la ley potencial los de más fácil resolución.

De este modo se han resuelto los problemas de la *compresión* uniforme, la *extensión simple*, la *flexión*, la *torsión*, la *capa cilíndrica* (tubos de gran espesor), etcétera, problemas iniciados por Lamé, en su teoría de la Elasticidad, y resueltos por Barré de Saint-Venant, en su célebre Memoria, en la que consiguió demostrar matemáticamente la exactitud de las geniales hipótesis de su maestro Bernouilli, y cuyas cuestiones han sido nuevamente tratadas y ampliadas por MM. Cosserat, Poincaré, Korn y otros matemáticos modernos.

Así resulta que el estudio de la resistencia de materiales por el medio expuesto conduce a grandes desarrollos matemáticos que, de seguirlos, nos llevarían a incurrir en la grave falta de usar la matemática como *fin* y no como *medio*, que es el verdadero punto de vista del ingeniero, punto de vista o *justo medio*, muy difícil de encontrar la mayor parte de las veces.

Así, pues, en la Escuela, el curso de Materiales se desarrolla, no por la teoría de Elasticidad, sino como tal Resistencia, partiendo de hipótesis de naturaleza geométrica como antes se dijo, y tal como aparece en los cuatro capítulos, escritos por el teniente coronel Herrera, que abarcan los principios relativos a la fijación de características de los materiales y la extensión y compresión, completándose por explicaciones que se continúan para las teorías de la flexión, torsión y resolución de estructuras planas y estériles.

Ello no es obstáculo para acudir a la teoría de Elasticidad cuando es necesario, sobre todo, en aquellos puntos en que reporta una utilidad, como, por ejemplo, en el caso de la torsión de piezas de sección cualquiera, entonces que los esfuerzos se reparten de un modo fácil de determinar usando la *analogía hidrodinámica* o el método de la *membrana*, cuyos métodos se deducen fácilmente de las ecuaciones diferenciales del problema; y, asimismo, el estudio de la deformación en este caso conduce a la conclusión de que las secciones planas dejan de serlo, cosa que la solución de Saint-Venant explica de modo concluyente, y ello hace formar un *criterio correcto* en problema de tanta monta para las aeronaves como el de la torsión, pues ya se recordará la grave avería del dirigible *Graf Zeppelin*, que le obligó a tomar tierra en Francia por rotura de los ejes de cuatro motores, de los cinco de que está dotado, a consecuencia de vibraciones de torsión.

También se explican, con arreglo a los puntos de vista más modernos, las teorías sobre las causas de rotura de los materiales, exponiendo los distintos criterios para establecer los estados elásticos de comparación, capaces de ocasionar la rotura; los teoremas más principales del trabajo molecular, como son los de Castigliano, y los no menos bellos de Maxwell-Beth sobre la reciprocidad, extensibles también a las estructuras, en cuya teoría permiten una facilísima manera de calcular y explicar los casos *hiperestáticos*.

Pero aun no acudiendo a la teoría de la Elasticidad más que en algunos casos muy especiales, el exponer el problema general de la Resistencia por medio de sus principios, tiene la enorme ventaja de no dar a las *fórmulas prácticas* obtenidas en cada caso (que son las mismas que se deducen aun empleando todo el rigor matemático) otro valor que el que realmente tienen, que es solamente el de un *criterio* para calcular el material, pero de ningún modo la representación de la *verdad pura* de lo que ocurre en el interior del cuerpo empleado, pues hasta se desconoce la causa íntima de la rotura, y en cada caso una fórmula sólo responde a una solicitación en *armonía* con el modo de deformación *supuesto* para deducirla.

Y es que aquí, aun más que en otros aspectos de la ciencia, puede decirse con el sabio coronel de Ingenieros don Nicolás de Ugarte, que el conocimiento humano es como una curva que tiene por *asíntota oscilante* la realidad.

Finalmente, diremos que aun adoptando el método de la hipótesis geométrica sobre la deformación en cada caso, se sigue, sin embargo, el criterio de mirar el problema de la resistencia como un problema mecánico, y así se estudia en cada uno los tres aspectos: *estático* para la determinación de los esfuerzos; *cinemático* para hallar las deformaciones, y *dinámico* para tener en cuenta la masa del material en su movimiento de deformación, y cuando éste sea entretenido, calcular los esfuerzos dinámicos, que resultan que, a veces, pueden llegar a ser infinitos, como es sabido ya, en el problema de la *vibración.*

Este aspecto dinámico del asunto es el que caracteriza principalmente la modalidad del estudio de la Resistencia de Materiales en la Escuela Superior de Aeronáutica, cuya modalidad da lugar a una nueva característica de los metales, la *capacidad de amortiguamiento,* sobre la cual hablaremos otro día, y todo ello hecho con el entusiasmo que nos da el pensar que contribuímos con escasa medida, como corresponde a nuestras fuerzas, pero con profunda fe al engrandecimiento de la Aviación, que será también el de la patria española.

Ideas acerca de la propulsión por reacción

En un artículo publicado anteriormente en esta revista dijimos que el grado de rendimiento energético máximo de tales propulsores era:

$$(W_{en})_{max} = 64{,}7\ \%$$

o sea,

$$(W_{en})_{max} = 65\ \%$$

aproximadamente, para un valor de

$$q_{opt} = \frac{m_{aa}}{m_r} = 3{,}997895$$

o lo que es aproximadamente lo mismo para

$$q_{opt} = 4$$

es decir, que para alcanzar el rendimiento máximo debe ser la masa inicial de combustible igual a unas cuatro veces la del espacio vacío del vehículo cohete.

La dependencia entre W_{en} y q_o se ve claramente en la tabla numérica número 1 y en la figura 4 que se dan en este trabajo. De ellas se deduce que el rendimiento energético crece rápidamente para los valores pequeños

Rendimiento energetico en función de la relación de masas inicial

Fig. 4.

de la relación de masas inicial, alcanza su valor máximo (igual *a 64,7 %* ó *a 65 %* próximamente) para q_o igual a 4 aproximadamente y después decrece ya con mayor lentitud (asintóticamente, pudieramos decir) hacia el valor 0.

Si en la ecuación fundamental

$$V_{max} = c \,.\, ln\,[\,1 - (m_{aa} : m_r)\,] = c \,.\, ln\,(1 + q_o)$$

sustituímos q_o por su valor óptimo, es decir, hacemos

$$q_o = 4$$

obtendremos

$$(V_{max})_{opt} = c \,.\, ln\,(1 + q_{opt}) = c \,.\, ln\,(5) = 1{,}61\ c$$

y para pequeños valores de $q_o < 1$ tendiendo hacia la unidad aproximadamente

$$(V_{max})_{opt} = c \,.\, q_{opt} = 4\ c$$

y para valores grandes de $q_o > 1$, o para expresarnos con más propiedad, para $q_o > 20$ se obtiene del mismo modo

$$(V_{max})_{opt} = c \,.\, ln\ q_{opt} = c \,.\, ln\ (4)\ 1{,}38\ c.$$

El rendimiento energético máximo se logra únicamente para una relación fija entre la velocidal final del vehículo y la de salida de los gases; la creencia, muy extendida, de que dicho rendimiento máximo se alcanza cuando la velocidad del móvil es igual a la de los gases, no es cierta, ya que entonces se verifica que

$$\frac{V_{max}}{c} = 1$$

a lo que corresponde un rendimiento de 60 % próximamente, bastante elevado, ciertamente, pero no el máximo alcanzable que corresponde al valor

$$\frac{V_{max}}{c} = 1{,}61.$$

Esto explica inmediatamente el despilfarro de energía que lleva consigo la utilización de los propulsores de reacción en vehículos relativamente lentos, especialmente en los que hayan de desplazarse apoyándose sobre la superficie terrestre, cuya velocidad ha de ser forzosamente reducida.

Con vehículos deslizadores sobre carriles, por ejemplo, se podrán obtener velocidades de traslación mayores, pero aun en este caso el rendimiento energético sería muy malo, ya que para

$$V_{max} = 600 \text{ kms./hora} = 166 \text{ ms./seg.}$$

y

$$c = 1.500 \text{ ms./seg.}$$

se obtiene

$$\frac{V_{max}}{c} = 0{,}11$$

y aproximadamente

$$W_{en} = 10\ \%.$$

Claro es que la velocidad de salida de la corriente gaseosa podría reducirse y con ello aumentar la relación $\frac{V_{max}}{c}$. De todos modos, la disminución de V_{max} lleva consigo una disminución del rendimiento mecánico del motor, como se deduce de la ecuación

$$A_r = {}^1/_2\ m_r\ V^2_{max}$$