El fenómeno de Gibbs en la teoría del monoplano de envergadura finita

Por el Teniente Coronel
PEREZ - MARIN
Piloto y Observador de avión e Ingeniero Aeronáutico

Tratamos de evitar en lo posible temas que por su especialización no sean fáciles a una parte de los lectores. Por lo menos, pretendemos que sean tratados con un carácter de generalización suficiente para que puedan deducirse conceptos y consecuencias, sin necesidad de descender a desarrollos de detalle. Pero no puede eludirse la imprescindible exigencia que la Técnica Aeronáutica tiene de conocer y divulgar muchos temas que necesitan conocimientos previos no corrientes, sino excepcionales, para otras técnicas depuradas y exigentes. Esta es precisamente una cualidad distintiva de la técnica que sirve de base para el progreso de la Aeronáutica; el algoritmo matemático que emplea es excepcional. Cuando se pretende obtener rendimientos más que naturales del empleo de los materiales, no puede obrarse de otro modo.

Es por esto que se traen con gusto a esta sección artículos como el presente, y como otros ya publicados, que si bien se dedican en particular a los especialistas empeñados pacientemente en el progreso del material aeronáutico, se tratan a la vez en tono de divulgación, informativo más que doctrinal.

En la teoría aerodinámica del monoplano de envergadura finita se presenta el problema de, dada una configuración del ala (fig. 1.ª), determinar la repartición de la sustentación (*).

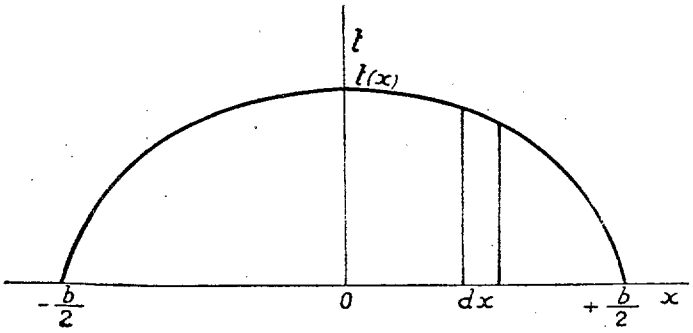

Figura 1.

La sustentación del ala para una banda dx es:

$$dA = \rho\, v_\infty\, \Gamma(x)\, dx.$$

En función del coeficiente de sustentación, es también:

$$dA = \frac{\rho}{2}\, c_a\, t\, v_\infty^2\, dx.$$

Todo ello con las siguientes notaciones:

A = sustentación.
c_a = coeficiente de sustentación.
$t = t(x)$ = ecuación del contorno del ala.
b = envergadura.
v_∞ = velocidad a gran distancia del ala.
$\Gamma(x)$ = circulación.
$\alpha(x)$ = ángulo de ataque.

El coeficiente de sustentación es:

$$c_a = c'_{a\infty}\left[\alpha(x) - \frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}\right].$$

El valor $c'_{a\infty}$ oscila entre 5,02 y 5,65, siendo el sustraendo del corchete la cantidad en que disminuye el ángulo de ataque a causa del torbellino de banda.

Por consiguiente, llegamos a:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2}\, t(x)\, v_\infty\, c'_{a\infty}\left[\alpha(x) - \frac{1}{4\pi v_\infty}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}\right],$$

ecuación integral famosa, que nos liga la circulación y la configuración $t(x)$ del ala.

(*) Véase: "Theorie der Luft Kräfte", por Fuchs; "The elements of Aerofoil and airscrew theorie", por H. Glauert.

Con el cambio de variables:

$$x = \frac{b}{2} \cos \varphi \qquad \xi = -\frac{b}{2} \cos \Psi$$

y escribiendo

$$\Gamma (x) = 2 \, b \, v_\infty \, G (\varphi)$$

$$t = \frac{4 \, b}{c'_{a_\infty}} \, \mu (\varphi)$$

tendremos la ecuación integral

$$G (\varphi) = \mu (\varphi) \left[\alpha (\varphi) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d G}{d \Psi} \frac{d \Psi}{\cos \Psi - \cos \varphi} \right],$$

en la que tanto φ como Ψ varían de o a π.

En el supuesto de ser el ángulo de ataque α constante a lo largo de la envergadura, si resolvemos la ecuación integral antes escrita, tendremos $G (\varphi)$ en función de $\mu (\varphi)$, o sea $\Gamma (x)$ en función de $t (x)$, con lo que resolveríamos el problema planteado.

Uno de los procedimientos clásicos de resolución es desarrollar, en serie de Fourier trigonométrica, la función $\mu (\varphi)$, que, definida en el intervalo (o, π), la podemos prolongar de o a $-\pi$ como función impar. Además, al ser simétrica con respecto a $\frac{\pi}{2}$, su desarrollo será de la forma

$$\mu = \mu_1 \operatorname{sen} \varphi + \mu_3 \operatorname{sen} 3 \varphi + \ldots\ldots$$

Puesto que la configuración del ala es un dato, el desarrollo anterior será posible con las formas corrientes de dicha configuración.

Supuesto el desarrollo en serie de

$$G (\varphi) = G_1 \operatorname{sen} \varphi + G_3 \operatorname{sen} 3 \varphi + \ldots\ldots$$

y supuesta la posible diferenciación e integración término a término, se llega a:

$$\operatorname{sen} \varphi \sum_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} \, . \operatorname{sen} (2n - 1) \varphi =$$

$$= \alpha \mu \operatorname{sen} \varphi - \mu \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1) \, G_{2n-1} \, . \operatorname{sen} (2n - 1) \varphi.$$

Con esta ecuación se determinan los coeficientes G_2, y con ellos el valor de G, de la circulación Γ y sustentación A.

Ahora bien: en los casos en que la configuración del ala sea rectangular o trapezoidal, al desarrollar $\mu (\varphi)$, es decir, $t (x)$ en serie de Fourier trigonométrica, se presenta en los dos extremos del ala, o sea en los puntos $\varphi = o$, $\varphi = \pi$, el llamado fenómeno de Gibbs, y, por consiguiente, la serie ya *no representa sólo* la configuración del ala.

Puesto que dicho fenómeno de Gibbs no suele encontrarse explicado en los cursos corrientes de Cálculo, daremos una sucinta información y, al mismo tiempo, un procedimiento que creemos muy rápido para llegar a la evaluación del segmento consecuencia de dicho fenómeno.

Al desarrollar una función de gráfica análoga a la de un rectángulo, por ejemplo (fig. 2), la serie de Fourier de dicha función, para un gran número de términos, no sólo se aproxima al contorno del rectángulo, sino que comprende también los segmentos $B B_1$. En esto consiste el fenómeno de Gibbs.

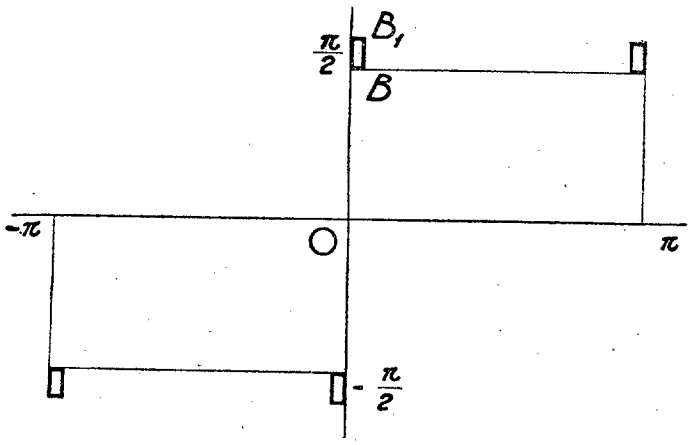

Figura 2.

Evaluemos la longitud de dicho segmento para una función $f (x)$ con una discontinuidad de primera especie en el origen, ya que estudiando el fenómeno para la función $f (x)$ está estudiado para cualquier otro, puesto que si es $\varphi (x)$ una función que presente en c un salto H, haciendo

$$\varphi (x) = \frac{H}{\pi} f (x - c) + \varphi_1 (x)$$

nos resultará que $\varphi_1 (x)$ será continua en c, y el fenómeno de Gibbs para $\varphi (x)$ será tal, que en c, en lugar de señalar un segmento de longitud H, lo señalará de

$$\frac{H}{\pi} \left[f (+ o) - f (- o) \right].$$

Nuestra función $f (x)$ será la definida por:

$$f (x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad o < x < \pi,$$

$$f (x) = -\frac{\pi}{2} \quad » \quad -\pi < x < o,$$

$$f (x) = o \quad » \quad x = \pi, x = o, x = -\pi,$$

análoga a la que definirá el contorno rectangular del ala considerada.

La serie de Fourier correspondiente es:

$$y = 2 \left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5 x + \ldots\ldots \right] =$$

$$= \int_o^x \left[\cos t + \cos 3 t + \cos 5 t + \ldots\ldots \right] d t =$$

$$= \int_o^x \frac{\operatorname{sen} 2 n t}{\operatorname{sen} t} \, d t,$$

cuya gráfica es la de la figura 2.

Cuando x se acerca al origen, las curvas obtenidas al dar valores a n, pasan por el origen, acercándose al eje de las Y. Veamos, a partir de $x = 0$, las máximas que presenta y los límites de estos máximos para $n \to \infty$.

Tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} x} = 0$$

para $\operatorname{sen} 2nx = 0$; es decir, para $x = \frac{K\pi}{2n}$, excluído el valor $x = 0$. Para $K = 1$ tendremos el primer valor de x, que hace máximo a y. Luego para $x = \frac{\pi}{2n}$, la curva

$$y = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} 2nt}{\operatorname{sen} t}\, dt$$

tiene el primer máximo. Hagamos crecer a n, con lo que x se acercará al origen, y veamos el límite a que tiende dicho máximo.

Haciendo el cambio de variable

$$2nt = z$$

tendremos para $x = \frac{\pi}{2n}$:

$$y = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} z}{2n \operatorname{sen} \frac{z}{2n}}\, dz.$$

Vamos a demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} y = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz.$$

Para ello bastará probar que dado un $\varepsilon > 0$, hay un n_0 tal, que para $n > n_0$,

$$\left| \frac{\operatorname{sen} z}{2n \operatorname{sen} \frac{z}{2n}} - \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right| < \varepsilon,$$

cualquiera que sea z en el intervalo $(0\,\pi)$.

En efecto, el valor absoluto anterior es menor que

$$\left| \frac{1}{2n} \operatorname{tg.} \frac{z}{4n} \right| < \frac{1}{2n} \operatorname{tg.} \frac{\pi}{4n} < \varepsilon.$$

Luego, efectivamente,

$$\lim. y = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz.$$

Este seno-integral, calculado por las tablas de Jahnke-Emde, es igual a 1,85.

Es decir, que el límite del primer máximo es de 1,85, en lugar de ser de 1,57, y, por consiguiente, el segmento del fenómeno de Gibbs es en nuestro caso de 0,28. En general es, por tanto, 9 por 100 más que el salto H de cualquier función.

Se comprende, por consiguiente, que sea preferible aproximar un polinomio trigonométrico a la función del contorno del ala, acogiéndonos al teorema de Weierstrass, mediante un número de términos cuyos coeficientes no sean los de Fourier, sino los determinados por el método de los mínimos cuadrados.

En la figura 3, para un ala rectangular con alargamiento $\Lambda = 7$, se señala la aproximación obtenida con tres términos del polinomio de aproximación:

$$t = \frac{4b}{\Lambda\pi} (\operatorname{sen} \varphi + 0{,}297 \operatorname{sen} 3\varphi + 0{,}0982 \operatorname{sen} 5\varphi),$$

así como la aproximación con el polinomio de Fourier de cinco términos:

$$t = \frac{4b}{\Lambda\pi} \left(\operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\varphi + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\varphi + \frac{1}{7} \operatorname{sen} 7\varphi + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 9\varphi \right).$$

Se observa (fig. 3) que el polinomio de Fourier con cinco términos da peor el contorno que el polinomio de tres términos. Además, en el de Fourier se inicia el fenómeno de Gibbs.

Muchas son las cuestiones de Aerodinámica elemental que requieren el concurso de materias de análisis que no suelen desarrollarse en los programas nacionales y extranjeros usuales de las carreras de Ingenieros. Por ello casi todas las Aerodinámicas dedican varios capítulos iniciales a dar conocimiento de la herramienta matemática indispensable, justificando que lo hacen a la vista de los planes de estudio de los distintos centros de enseñanza técnica no dedicados especialmente a la Aerotecnia.

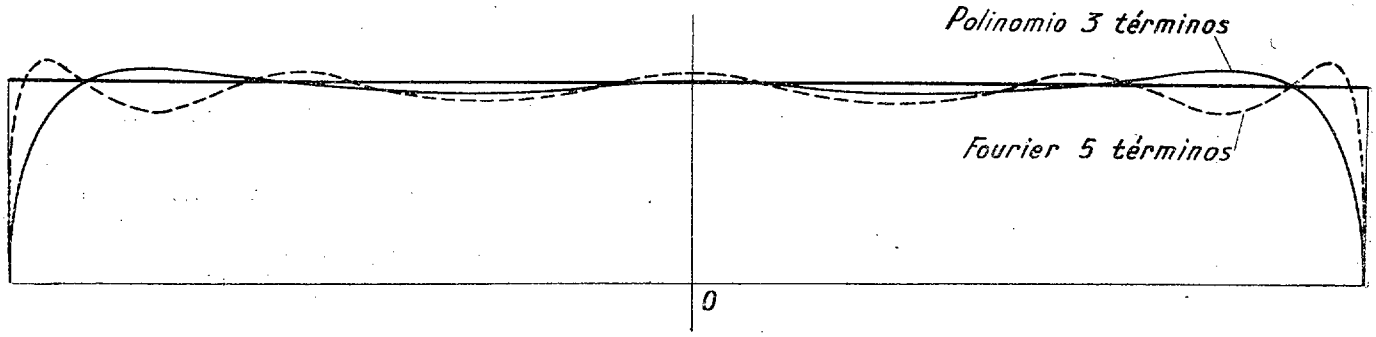

Figura 3.