

# Aerotecnia

## Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro

Por P. PUIG ADAM

Profesor de Cálculo en la Escuela Superior Aerotécnica

EN una conferencia dada, durante su última estancia en Madrid, por el Sr. La Cierva, en la Escuela Superior Aerotécnica, expuso algunos problemas matemáticos a que le había conducido el estudio teórico de su famoso invento, y entre ellos propuso el estudio de las soluciones de la ecuación diferencial, que desde entonces ocupa la atención de algunos profesionales y aficionados:

$$m \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + \left( \frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} \varphi \right) \frac{d\theta}{d\varphi} + \left( m + \lambda \cos \varphi + \frac{3}{4} \lambda^2 \operatorname{sen} 2\varphi \right) \theta = 0 \quad [1]$$

$\varphi$  (variable independiente) es el ángulo azimutal de la pala.

$\theta$  (función) es el ángulo de desviación (altura o depresión) de la pala respecto de su posición de equilibrio dinámico durante el giro.

$\lambda$  es un parámetro: relación entre la velocidad de avance del autogiro y la velocidad periférica. Su valor varía, pues, según el régimen de velocidad, creciendo con ella. El Sr. La Cierva conceptúa  $\lambda = 1$  como un buen valor límite, con miras a futuros perfeccionamientos del autogiro (autogiro ultrarrápido).

$m$  es otro parámetro: relación de masas: «una, la del volumen de aire contenido en un paralelepípedo rectángulo de lados iguales al radio del rotor y a la anchura de la pala (dos veces), y otra, la masa de la pala». Su valor varía de unos a otros autogiros entre límites extremos 0,15 y 1, pero para un autogiro determinado permanece sensiblemente fijo (salvo grandes variaciones de densidad del aire). Puede tomarse  $m = 0,5$  como un valor medio aceptable.

Interesa al ilustre inventor del autogiro, más que la integración cuantitativa para determinadas condiciones iniciales, la demostración matemática de la estabilidad del movimiento, perfectamente comprobada en los autogiros hasta ahora construídos, y presumible también para mayores velocidades o valores de  $\lambda$ . Más concretamente (\*), se trata de ver si  $\theta$  tiende a cero al crecer  $\varphi$ , cualesquiera que sean dichas condiciones iniciales (perturbación del movimiento en un momento dado, por una racha de viento, por ejemplo).

Esta ecuación, como se ve, es lineal homogénea y de coeficientes periódicos (periodicidad natural dado el movimiento de giro de la pala). Al campo, ya muy vasto, de

aplicaciones de las ecuaciones de coeficientes periódicos, se añade, pues, con la técnica del autogiro, una zona de fecundas posibilidades, por lo cual, el conocimiento de tales ecuaciones empieza a ser indispensable para los ingenieros aerotécnicos. Esta razón me ha inducido a iniciar la presente nota con una exposición, lo más elemental posible, de la integración cualitativa de tales ecuaciones (ceñida a lo que de momento nos interesa), antes de reseñar los trabajos que sobre ella he llevado a cabo, con la valiosa y perseverante ayuda de mis alumnos de la clase de Ecuaciones diferenciales en la mencionada Escuela, a quienes me complazco en agradecer la colaboración y en alentar efusivamente desde estas páginas.

### Integración cualitativa de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes periódicos

Para mayor facilidad del lector, así como por ser las más frecuentes, nos referiremos especialmente a las ecuaciones de segundo orden, como la del Sr. La Cierva. Sea, pues, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_2(x) y = 0 \quad [2]$$

cuyos coeficientes  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  son funciones continuas y periódicas de período  $\omega$ . Ante todo, se comprueba inmediatamente que si  $y_1(x)$  es una solución de la ecuación, también lo es  $y_1(x + \omega)$ , es decir, el conjunto de soluciones admite el período  $\omega$ , lo cual no significa que sean separadamente periódicas cada una de las soluciones.

Resulta inmediatamente de lo expuesto que si se tienen dos soluciones particulares  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  linealmente independientes, las soluciones  $y_1(x + \omega)$  e  $y_2(x + \omega)$  son combinaciones lineales de ellas, y podremos escribir:

$$\begin{aligned} y_1(x + \omega) &= a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) \\ y_2(x + \omega) &= a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) \end{aligned} \quad [3]$$

pudiéndose determinar fácilmente los coeficientes  $a$ , sin más que dar valores numéricos a  $x$ .

Así como para las ecuaciones de coeficientes constantes (caso particular de las que tratamos) se ensayan soluciones de la forma  $e^{\alpha x}$  cuya derivada logarítmica es constante ( $= \alpha$ ), parece natural ensayar aquí soluciones de la forma  $e^{\alpha x} \varphi(x) = \gamma_1(x)$  (siendo  $\varphi(x)$  periódica de período  $\omega$ ), cuya derivada logarítmica,  $\alpha + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ , es periódica ( $\omega$ ).

(\*) La noción de *estabilidad* ha tenido diversas interpretaciones matemáticas, según los problemas a que se ha aplicado.

Ahora bien, las funciones de esta forma, no son periódicas, si  $\alpha$  es distinto de cero, pues

$$\eta(x + \omega) = e^{\alpha(x + \omega)} \varphi(x + \omega) = e^{\alpha\omega} \cdot e^{\alpha x} \varphi(x) = e^{\alpha\omega} \eta(x) = s \cdot \eta(x) \quad [4]$$

Es decir, estas funciones son tales, que al aumentar la variable en un período  $\omega$  queda la función multiplicada por un número  $s = e^{\alpha\omega}$  que se llama *número característico*, mientras  $\alpha$  recibe el nombre de *exponente característico*. El conocimiento del número o exponente característico basta para decidir si la función  $\eta(x)$  tiende o no a cero al crecer la variable. En particular, si  $|s| < 1$ , podemos asegurar que  $\eta$  tiende a cero; hablando en términos concretos, en relación con el problema del autogiro: el movimiento de la pala tendrá sus oscilaciones amortiguadas, tendiendo a cero, puesto que a cada nueva vuelta vendrán sus amplitudes multiplicadas por un factor menor que la unidad.

Los números característicos  $s$  vienen determinados por una ecuación que en el terreno formal es fácil de hallar. Expresemos, en efecto, la solución  $\eta(x)$  como combinación lineal de  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$

$$\eta(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad [5]$$

y puesto que ha de verificar la condición [4], resultará, teniendo en cuenta [3],

$$\underbrace{\eta(x + \omega)}_{(C_1 a_{11} + C_2 a_{21}) y_1(x) + (C_1 a_{12} + C_2 a_{22}) y_2(x)} = \underbrace{s \cdot \eta(x)}_{s C_1 y_1(x) + s C_2 y_2(x)},$$

de donde por identificación

$$\begin{cases} C_1 a_{11} + C_2 a_{21} = s C_1 \\ C_1 a_{12} + C_2 a_{22} = s C_2 \end{cases} \quad [6]$$

y por eliminación de las  $C$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0, \quad [7]$$

ecuación de segundo grado llamada *característica*, que determina  $s$ .

Si las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son distintas, sustituidas cada una sucesivamente en [6], obtendremos dos pares de valores  $C_1$  y  $C_2$ , y, por tanto, [5] dos funciones  $\eta_1(x)$  y  $\eta_2(x)$  que cumplen la condición [4] (\*). Entonces se puede sustituir el sistema fundamental  $y_1, y_2$ , por  $\eta_1, \eta_2$ , que es también fundamental, puesto que cualquier relación lineal entre  $y_1$  e  $y_2$  implicaría una relación lineal entre  $\eta_1$  y  $\eta_2$ . En resumen, cualquier solución de la ecuación [2] se podrá expresar, pues, como combinación lineal de  $\eta_1(x)$  y  $\eta_2(x)$ , con lo que obtendremos el siguiente resultado:

(\*) Estas funciones vienen determinadas salvo un factor constante por ser el sistema [6] homogéneo, y se comprende que así sea puesto que si  $\eta(x)$  cumple la condición [4] también la cumplirá  $k\eta(x)$ .

Si las dos raíces de la ecuación característica [7] son distintas y en valor absoluto menores que la unidad, las soluciones  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , y, por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación, tienden a cero al crecer  $x$  (\*). El movimiento de la pala será estable cualesquiera que sean las condiciones iniciales.

(\*) Como este es el único caso que de momento nos interesa, prescindimos de completar la discusión de la ecuación característica. Es fácil ver, sin embargo, que cuando alguna de las raíces,  $s$ , por ejemplo, es de módulo  $< 1$  y la otra  $|s_2| > 1$ , no hay más soluciones convergentes que las de la forma  $k\eta_1$ , pues cualquier combinación lineal en que entren las dos funciones  $\eta_1, \eta_2$  crecerá con  $x$  indefinidamente. A toda raíz de módulo 1 corresponde una solución periódica. Por último, si  $|s_1| > 1$  y  $|s_2| > 1$ , todas las soluciones crecerán indefinidamente. El caso de raíces iguales es especialmente delicado y puede verse en los tratados especiales, como Goursat, Forsyth... (No he logrado encontrar en Madrid la Memoria fundamental de Floquet *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Annales de l'École Normale Supérieure, 1883.)

Generalización. — El proceso de cálculo expuesto se generaliza fácilmente al caso de una ecuación de orden  $n$ :

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad [I]$$

de coeficientes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  periódicos ( $\omega$ ). Si es  $y_1, y_2, \dots, y_n$  un sistema de soluciones fundamental y pretendemos buscar soluciones  $\eta(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ , que cumplan la condición  $\eta(x + \omega) = s \eta(x)$ , deberá tenerse

$$\sum_i C_i y_i(x + \omega) = s \sum_i C_i y_i(x)$$

y sustituyendo la solución  $y_i(x + \omega)$  por su expresión en función lineal de las  $y, y_i(x + \omega) = \sum_j a_{ij} y_j(x)$ , resulta:

$$\sum_i C_i \sum_j a_{ij} y_j(x) = \sum_j y_j(x) \sum_i C_i a_{ij} = \sum_j s C_j y_j(x),$$

de donde, identificando los coeficientes de  $y_j(x)$ , se obtiene el sistema

$$\sum_i C_i a_{ij} = s C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad [II]$$

homogéneo en las  $C$ , de cuya eliminación resulta la ecuación característica de grado  $n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - s & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

que determina los números característicos  $s$ . De cada uno de éstos se deduce, resolviendo [II], un sistema de coeficientes  $C$  que determina una solución  $\eta(x)$ .

Si las raíces son distintas,  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , tenemos  $n$  soluciones  $\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)$ , que son linealmente independientes, pues de cualquier relación lineal entre ellas, tal como  $\sum_k \lambda_k \eta_k = 0$ , resultaría, por adiciones sucesivas del período,  $n - 1$  relaciones nuevas  $\sum_k s_k \lambda_k y_k = 0, \sum_k s_k^2 \lambda_k y_k = 0, \dots, \sum_k s_k^{n-1} \lambda_k y_k = 0$ ; y eliminando entre éstas y la anterior los productos  $\lambda_k y_k$ , debería ser nulo el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1^2 & s_2^2 & \dots & s_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & \dots & s_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

lo cual no es posible por haber supuesto distintas las raíces  $s$ .

Siendo, pues, expresable cualquier solución como combinación lineal de las  $\eta$ , es fácil deducir de la convergencia de éstas la de cualquier otra solución. Si, pues, todas las  $s$  son distintas y de módulo menor que la unidad, todas las soluciones tienden a cero al crecer  $x$ . Para completar la discusión véanse los tratados especiales.

Obtención de las soluciones particulares y formación de la ecuación característica

Todo el cálculo indicado se funda en el conocimiento de dos integrales particulares  $y_1$  e  $y_2$  de la ecuación. Se eligen comúnmente aquellas definidas por las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{matrix} y_1(0) = 1 & y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 & y_2'(0) = 1 \end{matrix} \quad [8]$$

(Soluciones que son evidentemente independientes puesto que el wronskiano para  $x = 0$  vale 1.)

Por sustitución de estos valores en las relaciones [3] y sus derivadas, se obtiene fácilmente

$$\begin{matrix} y_1(\omega) = a_{11} & y_1'(\omega) = a_{12} \\ y_2(\omega) = a_{21} & y_2'(\omega) = a_{22} \end{matrix} \quad [9]$$

de modo que para la formación de la ecuación característica [7], o lo que es lo mismo:

$$s^2 - [y_1(\omega) + y_2'(\omega)]s + \begin{vmatrix} y_1(\omega) & y_2'(\omega) \\ y_1'(\omega) & y_2(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad [10]$$

basta conocer los valores numéricos de  $y_1$ ,  $y_2$  y sus derivadas al término del primer periodo.

Se demuestra en los tratados especiales que los coeficientes de la ecuación característica son *invariantes*, es decir, independientes de las integrales particulares elegidas, o, de otro modo, no dependen más que de los coeficientes de la ecuación diferencial.

En particular, el término independiente de la ecuación característica, que no es más que el valor del wronskiano  $W$  de  $y_1$  e  $y_2$  para  $x = \omega$ , se puede obtener inmediatamente en función de  $p_1$ , aplicando la siguiente fórmula (\*):

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx} \quad [11]$$

en el intervalo  $0, \omega$  lo que da, por ser

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$W(\omega) = e^{-\int_0^\omega p_1(x) dx} \quad [11 a]$$

En definitiva, la ecuación característica se reduce a

$$s^2 - [y_1(\omega) + y_2'(\omega)]s + e^{-\int_0^\omega p_1(x) dx} = 0 \quad [12]$$

(\*) Ver *Goursat*, tomo II. La demostración es sencilla; basta identificar la ecuación [2] con su equivalente

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

(que se satisface asimismo para  $y_1$  e  $y_2$ ); con lo que resulta

$$p_1(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

de cuya integración se obtiene [11].

y en el caso de La Cierva, por ser

$$\int_0^\omega p_1(x) dx = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\beta}{4m} + \frac{\lambda}{m} \operatorname{sen} \varphi \right) dx = \frac{3\pi}{2m},$$

será la ecuación característica

$$s^2 - [y_1(2\pi) + y_2'(2\pi)]s + e^{-\frac{3\pi}{2m}} = 0 \quad [13]$$

Una primera consecuencia podemos deducir de esta ecuación: El producto  $e^{-\frac{3\pi}{2m}}$  de los números característicos no depende de la velocidad de avance, y oscila, sustituyendo los límites indicados para  $m$ , entre

$$e^{-10\pi} \cong 2,3 \cdot 10^{-14} \quad \text{y} \quad e^{-1,5\pi} \cong 0,0089;$$

conservándose, pues, no sólo menor que la unidad, sino bastante pequeño. Para el valor  $m = 0,5$  resulta

$$e^{-3\pi} \cong 0,000081.$$

Por conservarse positivo este producto podemos afirmar, además, que los números característicos serán entre sí del mismo signo y se sumarán sus valores absolutos, de modo que si su suma,  $y_1(2\pi) + y_2'(2\pi)$ , es de módulo  $< 1$ , lo será cada uno de los números buscados (\*).

Para la determinación de la ecuación y de los números característicos resta sólo el cálculo de  $y_1(2\pi) + y_2'(2\pi)$ . Este cálculo tiene algunas dificultades. El método usual de desarrollo en serie de Taylor de las soluciones particulares  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , conduce a series de términos complicados, siendo precisos muchos de ellos para dar con cierta exactitud los valores correspondientes al argumento  $2\pi$ . (Basta considerar el fuerte crecimiento de las potencias de  $2\pi$  para comprender la necesidad de llegar a términos muy avanzados del desarrollo de Taylor, con objeto de que las factoriales del denominador consigan hacer estos términos pequeños, así, por ejemplo,

$$\left. \begin{matrix} \frac{(2\pi)^{15}}{15!} \cong 0,9; & \frac{(2\pi)^{18}}{18!} \cong 0,036 \end{matrix} \right\}$$

La aplicación de otros recursos (como el método de desarrollo en serie de potencias de los parámetros de los coeficientes de la ecuación, como el método de Hill ...) empleados en los cálculos de Mecánica Celeste, y de los cuales hablaremos al tratar de la ecuación reducida, nos ha parecido desorbitada para el grado de aproximación exigible en un problema técnico de la naturaleza del propuesto. Por todo ello, y también para dar una idea aproximada de la forma de las soluciones, he optado por hacer el cálculo aproximado de las funciones  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  en el intervalo  $0$  a  $2\pi$ , aplicando alguna de las fórmulas

(\*) Prescindimos sistemáticamente del caso de raíces imaginarias que no corresponde a realidad física alguna. De todos modos, si  $s_1$  y  $s_2$  fuesen imaginarios (conjugados) sería el cuadrado del módulo igual a su producto, que es menor que 1 según se ha visto.

de Runge. Claro es que esto exige dar valores numéricos a los parámetros. De acuerdo con el Sr. La Cierva adopté el valor medio  $m = 0,5$  y el valor límite  $\lambda = 1$ . Con objeto de no hacer los cálculos demasiado largos, me he contentado con una de las aproximaciones de Runge de segundo orden, que da un esquema de cálculo relativamente sencillo, conocido en los libros alemanes con el nombre *Tangententrapez-Verfahren* (método del trapecio de tangentes), y que puede el lector consultar, por ejemplo, en la obra de W. Hort, *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs*. Omitiendo, pues, detalles del cálculo, reproducimos de los cuadros calculados sólo las columnas  $y$ ,  $y'$  para una y otra solución. (Se han tomado intervalos de 15 en 15 grados).

| $x = \varphi$ | Solución $y_1$       |                      | Solución $y_2$       |                      |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|               | $y_1 = \theta_1$     | $y'_1 = \theta'_1$   | $y_2 = \theta_2$     | $y'_2 = \theta'_2$   |
| 0°            | 1                    | 0                    | 0                    | 1                    |
| 15°           | 0,89719              | - 0,70150            | 0,21039              | 0,51396              |
| 30°           | 0,64884              | - 0,6296             | 0,28286              | 0,06567              |
| 45°           | 0,38960              | - 0,81081            | 0,25399              | - 0,16381            |
| 60°           | 0,20604              | - 0,51572            | 0,19399              | - 0,19999            |
| 75°           | 0,10485              | - 0,27946            | 0,14129              | - 0,14917            |
| 90°           | 0,05641              | - 0,14022            | 0,10877              | - 0,08866            |
| 105°          | 0,02459              | - 0,06771            | 0,09589              | - 0,05273            |
| 120°          | 0,01505              | - 0,03068            | 0,08917              | - 0,01098            |
| 135°          | 0,01108              | - 0,01361            | 0,09148              | 0,02016              |
| 150°          | 0,00960              | - 0,00389            | 0,10075              | 0,04514              |
| 165°          | 0,00958              | 0,00069              | 0,11571              | 0,06453              |
| 180°          | 0,01027              | 0,00299              | 0,13481              | 0,07540              |
| 195°          | 0,01125              | 0,00343              | 0,15530              | 0,07259              |
| 210°          | 0,01210              | 0,00215              | 0,17282              | 0,05053              |
| 225°          | 0,01239              | - 0,00072            | 0,18183              | 0,00748              |
| 240°          | 0,01174              | - 0,00474            | 0,17711              | - 0,05186            |
| 255°          | 0,00994              | - 0,00914            | 0,15524              | - 0,11723            |
| 270°          | 0,00699              | - 0,01314            | 0,11626              | - 0,17781            |
| 285°          | 0,00308              | - 0,01623            | 0,06268              | - 0,22493            |
| 300°          | - 0,00149            | - 0,01790            | - 0,00121            | - 0,25328            |
| 315°          | - 0,00604            | - 0,01665            | - 0,06950            | - 0,25229            |
| 330°          | - 0,01016            | - 0,01394            | - 0,13263            | - 0,20392            |
| 345°          | - 0,01269            | - 0,00551            | - 0,17601            | - 0,09751            |
| 360°          | - 0,01300 = $a_{11}$ | + 0,00398 = $a_{12}$ | - 0,18509 = $a_{21}$ | + 0,04197 = $a_{22}$ |

Sustituyendo los valores numéricos  $m = 0,5$ ,  $y_1(2\pi) = - 0,013$ ,  $y'_2(2\pi) = 0,04197$  en la ecuación [13], resulta en definitiva,

$$s^2 - 0,02897 s + 0,000081 = 0, \quad [14]$$

cuyas raíces  $s_1 \cong 0,0256$ ,  $s_2 \cong 0,0032$  son notablemente menores que la unidad, lo que asegura (para estos valores de los parámetros al menos) una estabilidad considerable en el movimiento de la pala.

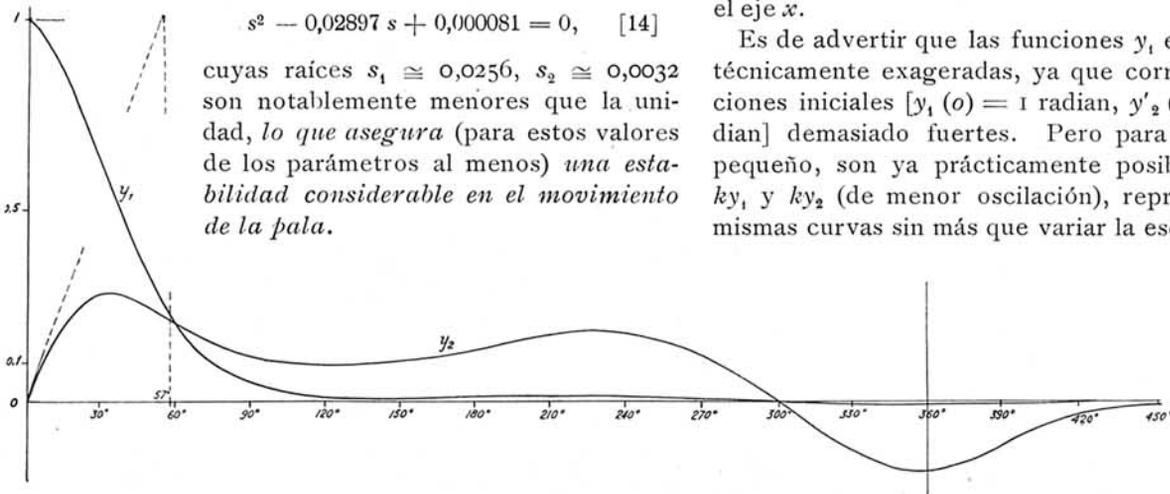


Fig. 1.

Queda pendiente una duda: ¿Los errores propios del método aproximado seguido, influirán hasta el punto de alterar el carácter del movimiento? Es fácil ver que no. En efecto, si fuese, por ejemplo,  $|s_1| > 1$ , la suma de las raíces sería de valor absoluto  $> 1$ . Para que tal hecho ocurriera sería, pues, preciso que los errores debidos a la aproximación del método fuesen del orden de la diferencia entre la unidad y el valor obtenido para la suma de las raíces 0,02897, lo cual es de todo punto inadmisibles (\*).

Es más, la comparación, *a posteriori*, entre el valor del wronskiano  $W(2\pi)$  dado por el cuadro

$$- 0,013 \cdot 0,04197 + 0,18509 \cdot 0,00398 = 0,000191$$

y su valor teórico  $[11 a] e^{-3\pi} = 0,000081$  (error o diferencia = 0,00011) nos da una idea del grado de aproximación con que se ha operado, y nos acusaría equivocaciones graves cometidas en los cálculos si la disparidad de valores fuese grande.

Para tener idea cuantitativa de dicha estabilidad basta ver que la segunda y tercera potencias  $s_1$  y  $s_2$  son ya tan pequeñas, que después de dos o tres vueltas de la pala las oscilaciones de ésta serán prácticamente nulas. Para ponerlo gráficamente de manifiesto se adjunta la representación gráfica de las funciones  $y_1$  y  $y_2$ , cuya prolongación más allá del primer período se consigue por aplicación reiterada de las fórmulas [3], que dan en este caso:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x + 2\pi) &= - 0,013 y_1(x) + 0,00398 y_2(x) \\ &\cong - 0,013 y_1(x) \\ y_2(x + 2\pi) &= - 0,185 y_1(x) + 0,042 y_2(x) \end{aligned} \right\} [15]$$

El módulo del término despreciado es  $< 0,004 \cdot 0,3 = 0,0012$ , menor que el espesor del trazo del dibujo a la escala elegida. De estas fórmulas resulta en seguida que a partir del argumento  $x = 450$  grados la curva  $y_1$  se confunde prácticamente con el eje  $x$ , y la curva  $y_2$  (dentro del segundo período) con los valores del primer período reducidos próximamente a  $1/25$ . Para la tercera vuelta, nueva reducción, con lo que se confunde ya con el eje  $x$ .

Es de advertir que las funciones  $y_1$  y  $y_2$  calculadas, son técnicamente exageradas, ya que corresponden a condiciones iniciales [ $y_1(0) = 1$  radian,  $y'_2(0) = 1$  radian / radian] demasiado fuertes. Pero para  $k$  suficientemente pequeño, son ya prácticamente posibles las soluciones  $ky_1$  y  $ky_2$  (de menor oscilación), representables por las mismas curvas sin más que variar la escala vertical.

(\*) En el libro de Hort, citado, hallará el lector varias aplicaciones de las fórmulas de Runge que le darán idea del excelente grado de aproximación que con ellas se obtiene.

La ecuación reducida

Con lo dicho queda indicado un método *viable* para averiguar la estabilidad, dado un par cualquiera de valores de los parámetros. (Prácticamente puede condensarse en la siguiente regla: calcúlense por el método de Runge,  $y_1$  e  $y_2$  entre 0 y  $2\pi$ , y obsérvese si  $y_1(2\pi) + y_2'(2\pi)$  es de módulo  $< 1$ .)

Ahora bien, probada la estabilidad para  $m=0,5$  y  $\lambda=1$ , como las raíces (números característicos) de la ecuación característica son funciones continuas de sus coeficientes y éstos a su vez son funciones continuas de los parámetros de la ecuación diferencial (\*), la estabilidad subsistirá en un cierto entorno de los valores adoptados. Además, como para aquellos valores la estabilidad es considerable, todo permite esperar que dicho entorno sea de cierta

características nuevas, repetir el cálculo indicado, tomando el valor de  $m$  propio de las palas y el valor de  $\lambda$  correspondiente a la máxima velocidad que se trate de desarrollar. Desde el punto de vista técnico la cuestión parece, pues, bastante dilucidada.

consideración. Por otra parte, existe la certeza práctica de que si el movimiento es estable para una cierta velocidad, lo es para velocidades inferiores, es decir, la estabilidad se conserva al disminuir  $\lambda$ , al menos entre los límites asignados para  $m$  (de aquí que se haya tomado un límite superior de  $\lambda$ ). En términos matemáticos parece que, en efecto, así deba ocurrir, toda vez que al disminuir  $\lambda$  disminuye la amplitud de las oscilaciones de los coeficientes de la ecuación diferencial, y ésta da para  $\lambda=0$  oscilaciones rápidamente amortiguadas (intégrese la ecuación de coeficientes constantes que resulta al poner  $\lambda=0$  en la ecuación de La Cierva); pero esto no constituye ni siquiera un conato de demostración, que sería interesante hallar. Supuesto esto cierto, bastaría, al proyectar un autogiro de

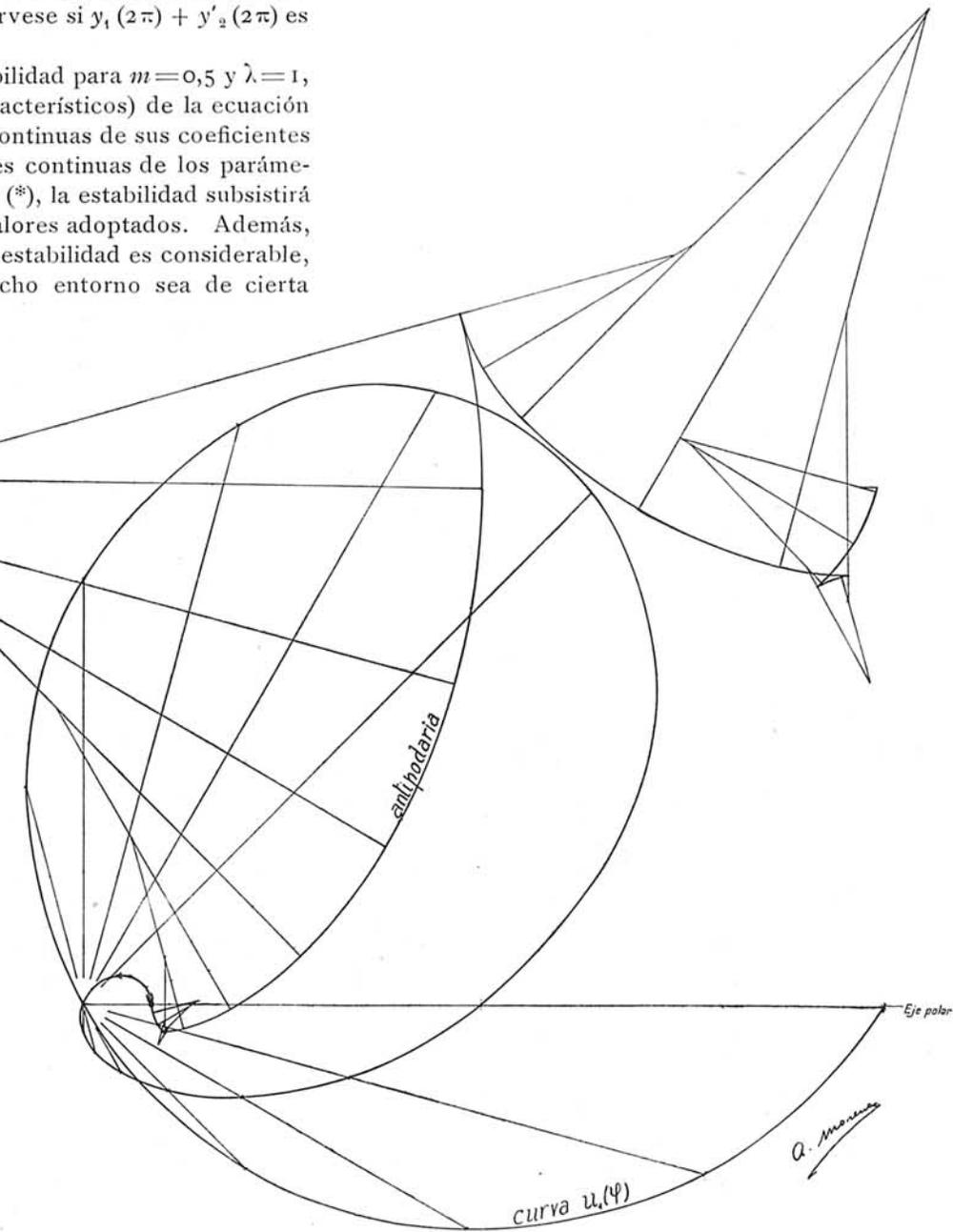


Fig. 2.

Desde el punto de vista matemático, aparte la demostración indicada, sería interesante resolver globalmente la cuestión, averiguando en qué región del plano ( $\lambda m$ ) es estable el movimiento. El estudio global de la estabilidad ha sido hecho para ecuaciones de tipo más sencillo (Hill, Mathieu), que *carecen del término en la primera derivada*. Por esta razón, tanto como para exponer los trabajos de mis alumnos, vamos a transformar la ecuación de La Cierva en otra que tenga el carácter apuntado. Basta

(\*) Véase la Memoria de Liapunof, *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté de Sciences de l'Université de Toulouse, 2.<sup>a</sup> serie, tomo 9, teorema de la página 400.

para ello hacer el conocido cambio  $\theta = uv$  y disponer de la arbitrariedad de la función  $v$ , por ejemplo, para anular el término en  $u'$ . Resulta:

$$m(u''v + 2u'v' + v''u) + \left(\frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} \varphi\right)(u'v + v'u) + (m + \lambda \cos \varphi + \frac{3}{4}\lambda^2 \operatorname{sen} 2\varphi)uv = 0. \quad [16]$$

Anulemos el coeficiente de  $u'$ :

$$2mv' + \left(\frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} \varphi\right)v = 0; \quad \frac{v'}{v} = -\frac{3}{8m} - \frac{\lambda}{2m} \operatorname{sen} \varphi \quad [17]$$

ecuación que se satisface tomando la integral particular

$$lv = -\frac{3\varphi}{8m} + \frac{\lambda \cos \varphi}{2m}; \quad v = e^{-\frac{3\varphi}{8m} + \frac{\lambda \cos \varphi}{2m}} \quad [18]$$

quedando la ecuación [16] reducida a

$$mu'' + u \left[ m \frac{v''}{v} + \left(\frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} \varphi\right) \frac{v'}{v} + m + \lambda \cos \varphi + \frac{3}{4}\lambda^2 \operatorname{sen} 2\varphi \right] = 0,$$

y sustituyendo  $\frac{v'}{v}$  por su valor [17] y  $\frac{v''}{v}$  por su valor despejado de la derivada de [17]

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{v'}{v} \right) = \frac{v''}{v} - \left( \frac{v'}{v} \right)^2 = -\frac{\lambda}{2m} \cos \varphi$$

$$\frac{v''}{v} = -\frac{\lambda}{2m} \cos \varphi + \left( \frac{3}{8m} + \frac{\lambda}{2m} \operatorname{sen} \varphi \right)^2$$

queda

$$u'' + u \left[ 1 + \frac{\lambda}{2m} \cos \varphi + \frac{3}{4m} \lambda^2 \operatorname{sen} 2\varphi - \frac{1}{4m^2} \left( \frac{3}{4} + \lambda \operatorname{sen} \varphi \right)^2 \right] = 0$$

Obsérvese que  $\operatorname{sen}^2 \varphi$  tiene el período  $\pi$  lo mismo que  $\operatorname{sen} 2\varphi$ ; el corchete es, pues, una función periódica con dos armónicos, pudiendo escribirse la ecuación así:

$$u'' = [a + b \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_1) + c \operatorname{sen}(2\varphi + \varphi_2)]u \quad [19]$$

que llamaremos *ecuación reducida*, en la que

$$\left. \begin{aligned} a &= -1 + \frac{9}{64m^2} + \frac{\lambda^2}{8m^2} \\ b &= \frac{\lambda}{2m} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4m}\right)^2} \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= -\frac{4m}{3} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} c &= \frac{\lambda^2}{4m} \sqrt{9 + \frac{1}{4m^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{1}{6m} \end{aligned} \right\} \quad [19 a]$$

Aun puede reducirse la ecuación [19] a una de primer orden observando que

$$\frac{u''}{u} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{u'}{u} \right) + \left( \frac{u'}{u} \right)^2$$

y tomando como nueva función  $\eta = \frac{u'}{u}$ . Queda así

$$\eta' = a + b \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_1) + c \operatorname{sen}(2\varphi + \varphi_2) - \eta^2 \quad [20]$$

que es del tipo Riccati (\*).

Dejando para otro lugar y ocasión el ocuparme de esta última transformada, diré que la ecuación [19] ha sido sometida en los últimos meses del curso al método numérico de Runge por parte de mis alumnos Sres. Ontiveros y Andeyro, y al método gráfico de Meissner (V. Hort, loc. cit.), por los alumnos Sres. Moreno y Ros. Adjunto un extracto de los laboriosos cuadros de cálculo de los primeros, quienes aplicaron el esquema de Runge, con intervalos de 10 en 10 grados para los mismos valores  $\lambda = 1$   $m = 0,5$ , que dan (19 a)

$$\begin{aligned} a &= 0,0625 \\ b &= 1,802775... \\ c &= -1,581135... \\ \varphi_1 &= -33^\circ 41' 20'' \\ \varphi_2 &= 18^\circ 26' 10'' \end{aligned}$$

(Reproducimos solamente las columnas  $u_1$   $u_2$   $u'_1$   $u'_2$ , y las filas correspondientes a argumentos múltiplos de 30 grados.)

| $\varphi$ | $u_1$     | $u'_1$   | $u_2$     | $u'_2$    |
|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| 0°        | 1         | 0        | 0         | 1         |
| 30°       | 0,78711   | -0,80241 | 0,48873   | 0,77070   |
| 60°       | 0,24743   | -1,12119 | 0,79038   | 0,43850   |
| 90°       | -0,34236  | -1,19598 | 1,07931   | 0,90916   |
| 120°      | -1,16867  | -2,29954 | 2,01079   | 3,12273   |
| 150°      | -3,10758  | -5,59300 | 4,85010   | 8,41183   |
| 180°      | -7,20088  | -9,63420 | 10,62140  | 14,58603  |
| 210°      | -12,05428 | -6,66053 | 17,97360  | 10,15902  |
| 240°      | -12,66499 | 5,09247  | 19,00376  | -7,44181  |
| 270°      | -7,49809  | 13,09457 | 11,35416  | -19,47461 |
| 300°      | -0,12409  | 14,31443 | 0,36916   | -21,33990 |
| 330°      | 7,31171   | 13,75386 | -10,72084 | -20,52769 |
| 360°      | 13,47911  | 8,08630  | -19,96324 | -12,27109 |

Es fácil cotejar las funciones  $u_1$   $u_2$  con las anteriormente obtenidas  $y_1$   $y_2$  (v. cuadro). En efecto [18], las soluciones  $y_1$   $y_2$  tienen que ser de la forma

$$y = e^{-\frac{3}{4}\varphi + \cos \varphi} [A u_1(\varphi) + B u_2(\varphi)]$$

(\*) A estas mismas ecuaciones, o de forma parecida, han llegado otros calculadores, entre ellos el Sr. Orts, quien al publicarlas en el número de *Ibérica* de 12 de mayo, observa la existencia de una solución sencilla de la ecuación [20] de la forma  $\eta = \alpha + \beta \operatorname{sen} \varphi + \gamma \cos \varphi$  para los valores particulares de los parámetros  $m = 0,0991$ ,  $\lambda = 0,707$ , fuera de los límites asignados por La Cierva.

y derivando, y expresando las condiciones iniciales, se obtiene, después de sencillos cálculos,

$$y_1 = e^{-\frac{3}{4}\varphi + \cos \varphi - 1} \left[ u_1(\varphi) + \frac{3}{4} u_2(\varphi) \right]$$

$$y_2 = e^{-\frac{3}{4}\varphi + \cos \varphi - 1} u_2(\varphi).$$

Teniendo en cuenta el anterior cuadro de valores, el lector podrá representar fácilmente estas curvas, y observará que, excepto en una zona inicial que llega próximamente hasta los 90 grados, y en la que hay pequeñas divergencias, en el resto del período las curvas coinciden muy sensiblemente con las antes obtenidas.

Del trabajo de los Sres. Moreno y Ros, reproducimos solamente (fig. 2, con una gran reducción de fotografiado) la obtención de la curva  $u_1(\varphi)$  siguiendo el método de Meissner, que da la curva en polares por intermedio de la curva antipodaria. No nos detenemos en detalles, pues el método, tanto por su reducida aproximación, como por las frecuentes dificultades de orden práctico que presenta, no es muy aconsejable.

**Notas finales**

Volviendo al problema matemático del estudio global de la estabilidad, añadiremos, para terminar, algunas notas.

I. — Liapunof, en su famosa Memoria antes citada *Problème général de la stabilité du mouvement*, deduce ciertas consecuencias generales acerca de los números característicos cuando el coeficiente  $p(x)$  de la ecuación  $\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)y$ , que es del mismo tipo que la reducida [19], tiene un signo fijo en todo el período. Desgraciadamente no es éste el caso de la reducida de la ecuación de La Cierva, ya que para  $m = 0,5$  y  $\lambda = 1$  el corchete de la ecuación [19] tiene la representación indicada en el siguiente gráfico:

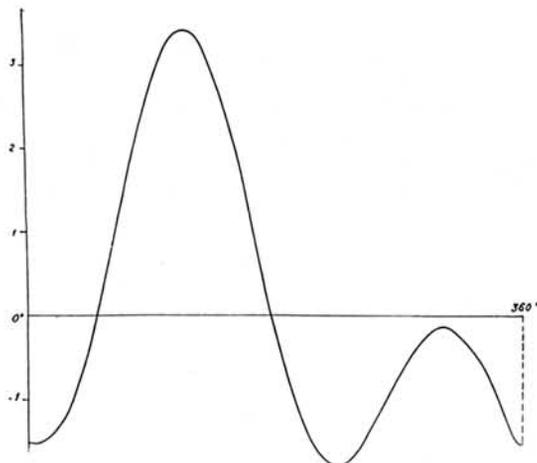


Fig. 3.

El Sr. Orts en reciente nota publicada en *Ibérica* (\*) invierte la cuestión e indica que por aplicación del teorema de Sturm a una cierta transformada de la ecuación [19] (mediante el cambio  $\text{tg } \frac{\varphi}{2} = x$ , que la racionaliza), se pueden hallar condiciones necesarias y suficientes que tienen que cumplir los parámetros  $\lambda$  y  $m$  para que  $p(\varphi)$  tenga signo positivo. Ahora bien, tales condiciones (que por su complejidad no llega a formular totalmente) son sólo *suficientes* para que la ecuación de La Cierva admita *algunas* integrales convergentes; de manera que ni son necesarias ni se puede afirmar con ello nada acerca de la existencia de integrales divergentes. Así, por ejemplo, el caso  $\lambda = 1, m = 0,5$  estudiado en este artículo, en el que *todas* las soluciones de la ecuación de La Cierva son convergentes, no cumple las condiciones indicadas por el Sr. Orts.

II. — Para las ecuaciones sin término en la derivada primera (es decir, en las que  $p_1(x) = 0$ ) como la reducida [19], el término independiente de la ecuación característica vale la unidad [11a]; se trata, pues, de una ecuación recíproca

$$s^2 - As + 1 = 0$$

Esta circunstancia permite expresar muy cómodamente los exponentes característicos  $\pm \alpha$ , pues las raíces de la ecuación serán

$$s_1 = e^{2\pi\alpha} \quad s_2 = e^{-2\pi\alpha}$$

y su suma

$$A = 2 \text{ Ch } 2\pi\alpha$$

de donde

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \text{ Arg Ch } \frac{A}{2}$$

Teniendo ahora en cuenta que  $\theta$  es el producto de  $u$  por  $v = e^{-\frac{3x}{8m} + \frac{\lambda \cos x}{2m}}$  la condición de estabilidad será que la parte aperiódica de dicho producto, o sea

$$e^{-\frac{3x}{8m} \pm \alpha x}$$

tienda a cero al crecer  $x$ , o sea que

$$-\frac{3}{8m} + \alpha < 0$$

que se cumple si

$$A < 2 \text{ Ch } \frac{6\pi}{8m}$$

(\*) Número de 16 de junio.

(Si  $A < 2$ ,  $\alpha$  es imaginario puro y la parte aperiódica de  $\theta$  queda reducida a  $e^{-\frac{3x}{8m}}$  que tiende a cero.)

Para el cálculo del coeficiente  $A$  puede seguirse el método de Runge, como en la ecuación directa, siendo su valor la suma de los últimos números de las columnas  $u_1$  y  $u'_2$ . Por este camino orientamos los cálculos desde un principio; posteriormente me he dado cuenta de que la simplificación que aporta la ecuación reducida es más aparente que real, en lo que se refiere a la materialidad de la aplicación del método de Runge, toda vez que la simplificación que supone la anulación del término en  $u'_1$  queda sobradamente compensada por la mayor complicación del término en  $u$ , y por el trabajo de restitución a la función  $\theta$ , si se quiere tener una idea gráfica de la variación de las soluciones.

III. — En la misma Memoria citada, Liapunof indica un ingeniosísimo método de desarrollo en serie del coeficiente  $A$  del término lineal de la ecuación característica  $s^2 - As + 1 = 0$ , correspondiente a la ecuación diferencial  $\frac{d^2y}{dx^2} = \varepsilon p(x)y$ , según las potencias crecientes de  $\varepsilon$ . El valor de  $A$  viene dado por

$$A = 1 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} [f_n(\omega) + z'_n(\omega)] \varepsilon^n, \quad [21]$$

en donde las funciones  $f_n(x)$  y  $z_n(x)$  pueden obtenerse mediante las fórmulas recurrentes

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x dx \int_0^x p(x) f_{n-1}(x) dx \\ z_n(x) &= \int_0^x dx \int_0^x p(x) z_{n-1}(x) dx \end{aligned} \right\} \quad [22]$$

Ahora bien, Liapunof cuida bien de advertir que este método es válido para valores suficientemente pequeños de  $\varepsilon$ . Goursat (\*), al reproducir este método, aplica la fórmula para  $\varepsilon = 1$ , con lo cual, aun suponiendo ciertamente convergente la serie [21], resulta de muy penosa aplicación para el cálculo práctico del coeficiente  $A$  por la escasez de la convergencia para valores grandes del período  $\omega$ . Al menos así ocurre en el caso que nos ocupa por razones análogas a las expuestas al tratar de los inconvenientes del método de desarrollo en serie de Taylor. El lector curioso y paciente puede convencerse pronto de ello aplicando unas cuantas veces las fórmulas

recurrentes [22]; el término independiente en el coeficiente  $p(x)$  engendra por integraciones reiteradas polinomios de grado creciente, es decir, verdaderas series de potencias de  $2\pi$  en [21]. No aconsejamos, pues, a menos que se nos demuestre lo contrario, la aplicación de dichas fórmulas.

IV. Hill, al estudiar el movimiento de la luna, que está sometida al campo atractivo Tierra-Sol de carácter periódico, llegó a una ecuación de tipo parecido, por lo cual todas las ecuaciones de la forma  $\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda + \Phi(x)] = 0$ , en las que  $\Phi(x)$  es periódica, se suelen llamar ecuaciones de Hill. En el caso de la Luna, la función  $\Phi$  podía ser desarrollada en series de cosenos de múltiples pares del argumento. Hill, desarrollando en series de exponenciales las soluciones buscadas  $y = e^{\alpha x} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_m e^{imx}$ , y sustituyendo en la ecuación, obtuvo un sistema de infinitas ecuaciones lineales en los coeficientes  $b$  con estas infinitas incógnitas, y, por eliminación de las  $b$ , la ecuación, en forma de determinante infinito, a que tiene que satisfacer el exponente característico  $\alpha$ . Este método, que para el caso de la ecuación lunar puede verse desarrollado en el *Modern analysis* de Wittaker-Watson, ha sido posteriormente generalizado a las ecuaciones de Hill de tipo general con parámetros  $\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda + \gamma \Phi(x)] y = 0$ , ocupando la atención de matemáticos de primera fuerza como Poincaré. (Véase M. J. O. Strutt, *Lamésche Mathiesche und verwandte Funktionen in Physik und Technik*.)

Para el estudio del caso particular  $m = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  no me ha parecido necesario recurso tan elevado, y para el caso general en que  $\lambda$  y  $m$  son variables, es de observar que estos parámetros no entran linealmente en la ecuación [19] ni hay medio de transformarlos en otros que tengan dicho carácter, por lo cual nuestro caso no se reduce a una simple aplicación del profundo estudio que en dicha Memoria de Strutt (publicada en los *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, año 1932) se hace acerca de la ecuación de Hill con uno y dos parámetros lineales. De su lectura puede sacarse, sin embargo, la asimilación de métodos diversos, cuya complejidad al ser aplicados al caso que nos ocupa no he sabido vencer.

Para más extensa bibliografía remitimos al lector estudioso a la que se inserta al final de dicha Memoria de Strutt, que creemos lo más completo que se ha publicado hasta la fecha acerca de ecuaciones de este tipo y sus numerosísimas aplicaciones.

(\*) *Analyse Mathématique*, tomo II, pág. 497, cuarta edición.